పాఠం 1

కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యాంశం అధ్యయనం చేయడం వలన మీరు : -

* కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ గురించి విద్యార్థులకు అవగాహన కల్గించడం
* కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ ప్రాముఖ్యతను విశదీకరించడం

చేయగల్గుతారు.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

1.1 ఉపోద్ఘాతం:

భవిష్యత్తు గురించి ఇతమిద్దంగా ఎవరూ, ఏమీ చెప్పలేరు. రేపు ఏం జరుగుతుందో ఎవరికీ తెలియదు. కానీ, ఆర్థిక, వ్యాపార, వాణిజ్య రంగాలలో భవిష్యత్తు గురించి అంచనా వేయడం తరచు అవసరమవుతుంటుంది. వచ్చే సంవత్సరం ఎన్ని వస్తువులు అమ్ముడుపోతాయో ఒక అంచనా లేకపోతే, వ్యాపారస్తుడు ఇబ్బందుల పాలవుతాడు. వచ్చే సంవత్సరము అమ్మకం ఎంత వుంటుందో, వ్యాపారస్తుడు అంచనా వేసి దానికి తగినట్లుగా ముడి పదార్థాలు కొనుగోలు చేయడం, వస్తుత్పత్తి చేపట్టడం జరుగుతుంది.

భవిష్యత్తు గురించి అంచనా వేయడానికి గణాంక శాస్త్రం ఉపయోగపడుతుందని మనం గతంలో నేర్చుకున్నాము. గణాంక శాస్త్ర ముఖ్య విధులలో అది ఒకటి. భవిష్యత్తు అంచనాలకు భూతకాల దత్తాంశం ఆధారము. గతాన్ని జాగ్రత్తగా అధ్యయనం చేసి భవిష్యత్తు గురించి ఒక అంచనా రూపొందించుకుంటాము.

గతంలో సంభవించిన కాలానుగతమైన మార్పులను తెలిసుకోవడము ఎంతైనా అవసరం. 1980లో అమ్మకాలు ఎలా వున్నాయి. 1985లో ఎలా వున్నాయి, 2000లో ఎలా వున్నాయి, వాటిని పరిశీలించి, 2005లో అమ్మకాలు ఎలా ఉంటాయో అంచనా వేయగలం. గత అమ్మకాలను ఇలా కాలానుగుణంగా అమరిస్తే వాటినే 'కాలశ్రేణులు' అంటాము.

గణాంక దత్తాంశాన్ని కాలానికి అనురూపంగా ఒక క్రమంలో రాస్తే వచ్చే శ్రేణిని కాలశ్రేణి అంటారు. వీటినే చారిత్రక శ్రేణులు అని కూడా వ్యవహరిస్తారు. ఒక శ్రేణి సాధారణంగా రెండు చలరాశుల మధ్య సంబంధాన్ని సూచిస్తుంది. ఈ రెండు చలరాశులలో ఒకటి తప్పనిసరిగా కాలమై ఉంటుంది. రెండవది ఉత్పత్తి గావచ్చు. అమ్మకాలు గావచ్చు. ధరలు గావచ్చు. ఏదయినా గావచ్చు. కాలం, చలరాశి అనే రెండు చలనాల మధ్య గల సంబంధాన్ని 'కాలశ్రేణులు' వెల్లడిస్తాయి.

1.2 నిర్వచనాలు :

'కెన్నీ అండ్ కీటింగ్'ల ప్రకారం - కాలంపై ఆధారపడిన దత్తాంశ సముదాయాన్నే కాలశ్రేణులు అంటారు.

'చౌ' నిర్వచనం ప్రకారం - ఒక చలరాశి లేదా అనేక చలరాశుల సమూహం అనేక కాల బిందువుల వద్ద తీసుకునే విలువల సమూహమే కాలశ్రేణులు.

'హంబర్గ్' అభిప్రాయం ప్రకారం గణాంక పరిశీలనలను కాలానుక్రమంలో అమర్చడాన్నే కాలశ్రేణులు అంటారు.
'క్రాక్సటన్ మరియు కాడెన్'ల ప్రకారం కాలానుగతంగా అమర్చబడిన దత్తాంశాన్నే కాలశ్రేణులు అంటారు.

'హిర్ష్' ఉద్దేశంలో ఒక చలరాశి కాలానుగుణంగా తీసుకున్న విలువలను కాలశ్రేణి అంటారు.

కాలం గడిచేకొద్దీ ప్రతి చలరాశి విలువలో మార్పులు సంభవిస్తుంటాయి. అనేక కారణాల వల్ల, ఎన్నో రకాల శక్తుల సంయుక్త, పరస్పర ప్రభావం వల్ల ఈ మార్పులు వస్తుంటాయి. వీటిని విశ్లేషణ చేయడం ద్వారానే భవిష్యత్తుకు సంబంధించిన చలరాశి మార్పులను అంచనావేయగలుగుతాము. దీనినే 'కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ' అంటారు. ఈ కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ వ్యాపారస్తులకే కాక ఆర్థికవేత్తలకు, వ్యవసాయ శాస్త్రజ్ఞులకు, భూగర్భశాస్త్రవేత్తలకు - ఇలా అనేక మందికి ఉపయోగపడుతుంది.

1.3 ఉద్దేశాలు :

కాల శ్రేణుల విశ్లేషణ అనేది దిగువ ఉద్దేశాలతో చేపట్టడం జరుగుతుంది.

1) దత్తాంశంలో నియమత్వం లేదా క్రమత్వాన్ని నిర్ణయించడం.

2) దత్తాంశంలోని మార్పులలో క్రమమైన పెరుగుదల, తగ్గుదలను అధ్యయనం చేసి ప్రవృత్తి (ధోరణి)ని కనుగొనడం.

3) ప్రవృత్తిని నిర్ణయించి, నియమిత కాలికంగా, ఆకస్మికంగా పరిణమించే మార్పులను నియంత్రణ చేయడం.

4) భూతకాలంలో గమనించిన మార్పులను ఆధారంగా చేసుకొని, భవిష్యత్తులో వచ్చే మార్పులను అంచనా వేయడం.

5) భవిష్యత్ కాలంలో మార్పులను అంచనా వేసి, వాటి కనుగుణంగా ప్రణాళికలను రూపొందించడం.

6) శాస్త్రీయ పద్ధతిలో వ్యాపార చక్రాలను పరిశీలించి, ఆర్థిక స్థిరత్వాన్ని నివారించడం,

7) వివిధ కాలాల్లో, వివిధ ప్రదేశాల్లో, వివిధ చలరాశుల్లో సంభవించే మార్పులను అధ్యయనం చేయడం.

1.4 ప్రాముఖ్యత :

కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ ద్వారా అందరూ అన్ని రంగాలలో భూతకాల దత్తాంశ ప్రవర్తన ఎలా ఉందో తెలుసుకొని, దాని ఆధారంగా భవిష్యత్తులో దత్తాంశ ప్రవర్తనను అంచనా వేసుకోవచ్చు. ఈ కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ ప్రాముఖ్యతను కింది అంశాలు వివరిస్తాయి.

1.4.1. చలరాశి ప్రవర్తన విశ్లేషణ : భూతకాలానికి సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని నిశితంగా పరిశీలిస్తే, దత్తాంశం మార్పుకు కారణాలేమిటో ఏ యే శక్తులు దాన్ని ప్రభావితం చేస్తున్నాయో సులభంగా అర్థం చేసుకోవచ్చు. చలరాశి విలువలు ఋతువుల వల్ల ఎంత ప్రభావితమయిందీ, వ్యాపార చక్రాల వల్ల ఎంత వరకు ప్రభావితమయిందీ తెలుసుకోవచ్చు. ఈ విధంగా చలరాశుల ప్రవర్తనను మనం అవగాహన చేసుకోవచ్చు.

1.4.2. తులనాత్మక పరిశీలన : కాలశ్రేణులను విశ్లేషణ చేసి, చలరాశిలో మార్పులకు కారణమయిన వివిధ శక్తుల గురించి తెలుసుకోవచ్చు. అంతేకాక, ఈ వివిధ శక్తుల ప్రభావాలను వేరు చేసి, వీటిని తులనాత్మకంగా అధ్యయనం చేయవచ్చు. చలరాశిలో మార్పులకు ఏ శక్తి ప్రభావం ఎంత వరకు, ఏ మేరకు ఉందో పోల్చి చూడవచ్చు.

1.4.3. భవిష్యత్ అంచనా : చలరాశి గత ప్రవర్తనను ప్రాతిపదికగా చేసుకొని, భవిష్యత్తులో దాని ప్రవర్తనను అంచనా వేయవచ్చు. ఈ అంచనా భవిష్యత్ కార్యాచరణ ప్రణాళికను రూపొందించుకోవడానికి ఎంతగానో ఉపయోగపడుతుంది.

1.4.4 నిర్ణయాలు చేయడం : అనేక సందర్భాలలో వివిధ విషయాలపై నిర్ణయాలు చేయడానికి కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ ఎంతగానో దోహదపడుతుంది. భవిష్యత్తులో చలరాశిని మార్చే కొన్ని శక్తుల ప్రభావాన్ని పరిమితం చేయడానికి వీలవుతుంది. వ్యాపార విస్తృతి, ధరల నియంత్రణ, ఉత్పత్తి నియంత్రణ వంటి ఎన్నో విధాన నిర్ణయాలు తీసుకోవడంలో కాలశ్రేణుల అవగాహన ఎంతగానో ఉపకరిస్తుంది.

ఈ విధంగా కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ, ఆర్థిక, వ్యాపార, వాణిజ్య, పారిశ్రామిక, వ్యవసాయక, శాస్త్ర విజ్ఞాన రంగాలలో ఎంతో ప్రాముఖ్యతను సంతరించుకొంది. భవిష్యత్తు గురించి ఆలోచించడం, కార్యాచరణ ప్రణాళిక రూపొందించుకోవడం - అందరూ చేసే పనే ఈ క్రమంలో కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ విశేషంగా మనకు ఉపయోగపడుతుంది.

రచయిత

డా॥ పి. సి. సాయిబాబా

పాఠం 2

కాలశ్రేణులలోని భాగాలు - ప్రవృత్తి గణన

(Components of Time Series - Measurement of Trend)

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యంశం అధ్యయనం చేయడం వలన మీరు : -

* కాలశ్రేణులలోని వివిధ భాగాల గురించి వివరంగా తెలుసుకొనగలరు
* విశ్లేషించి కాలశ్రేణి ప్రవృత్తిని గణన చేయడము కూడా తెలుస్తుంది

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

2.1 ఉపోద్ఘాతం:

కాలశ్రేణులలోని భాగాలను (Components) అంశాలు అని కూడా అంటారు. కాలశ్రేణులలో సంభవించే మార్పుల కారణాలను కాలశ్రేణులలోని భాగాలు అంటారు. ఈ మార్పులు నాలుగు రకాలుగా విభజించబడినాయి. అవి

(ఎ) దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి(Secular Trend)

(బి) ఋతు సంబంధ విచరణాలు (Seasonal Variations)

(సి) చక్రీయ విచరణాలు (Cyclical Variations)

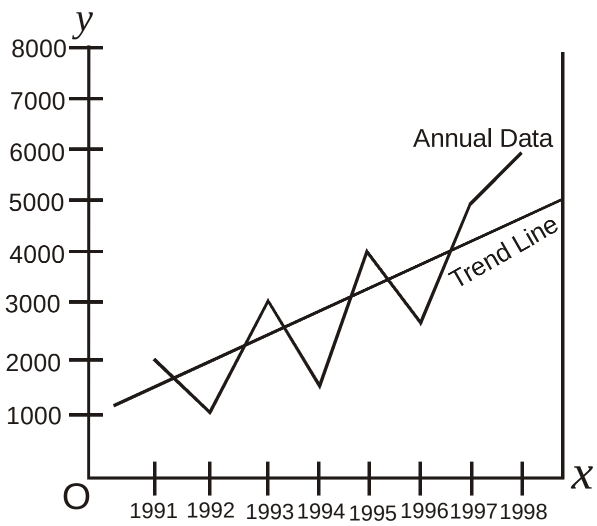
(డి) క్రమరహిత విచరణాలు (Irregular Variations)

2.2 దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి (Secular Trend):

దీర్ఘకాలానికి చెందిన దత్తాంశములోని విలువలు క్రమంగా పెరుగుచున్నాయో లేక తగ్గుచున్నాయో ప్రవృత్తి (trend) తెలుపుతుంది. దత్తాంశములో పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల లేదా నిలకడగా ఉండే సాధారణ ప్రవృత్తిని దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి అంటారు. అంటే కాలశ్రేణులలో మొత్తం మీద సాధారణ పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల లేదా స్థిరముగా ఉండడమే దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి అని అర్థం.

సింప్సన్, కఫ్కాల ప్రకారం " శ్రేణులలో కొంత కాలంపాటు కలిగే సాధారణ పెరుగుదల లేదా క్షీణతా స్థితిని దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి అంటారు. ఇందులో స్వల్పకాలిక మార్పులు చేరవు. కాని దీర్ఘకాలంలో వచ్చే స్థిరమైన మార్పులు చేరతాయి".

క్రింది రేఖా చిత్రంలో దీర్ఘకాలిక చలనాలను సరళరేఖగా చూపడమైనది. దీనినే ప్రవృత్తి రేఖ అంటారు. ఈ రకమైన ధోరణి సాధారణంగా ఆర్థిక, వ్యాపార శ్రేణులలో కన్పిస్తుంది.



లక్షణాలు :

1. ఇది సాధారణ, మృదువైన దీర్ఘకాలిక చలనత్వం, దీర్ఘకాలంలోని మధ్య మధ్య కాలాలలో పెరుగుదల, తగ్గుదల, స్థిరతాగమనాలు కనిపించినప్పటికీ మొత్తం మీద ఈ మార్పు పైకి పెరగడం లేదా క్రిందికి పడిపోవడం లేదా నిలకడగా ఉండడాన్ని సూచిస్తుంది.

2. దీర్ఘకాలం అనే భావన సాపేక్ష పదం ఇది దత్తాంశ స్వభావంపై ఆధారపడి ఉంటుంది. అయితే కొన్ని విషయాలలో కొద్ది గంటల సమయం కూడా చాలా ఎక్కువగా అనిపిస్తుంది. ఉదా॥ ఉష్ణోగ్రత లెక్కింపు. మరికొన్ని విషయాలకు మూడు, నాలుగు సంవత్సరాల కాలం కూడా దీర్ఘకాలంగా అనిపించదు. యదార్థ పరిస్థితిని తెలుసుకోవడానికి రెండు లేక మూడు సంక్లిష్ట కాల చక్రాలకు సంబంధించిన కాలశ్రేణుల విలువలను పరిశీలించవలె. కాల విస్తృతి పెరుగుతున్న కొలదీ ప్రవృత్తి కూడా ప్రముఖంగా పెరుగుతుంది.

3. సరళరేఖీయ, వక్రరేఖీయ ప్రవృత్తి : రేఖాపటంపై కాలశ్రేణి దత్తాంశం సరళరేఖగా ఏర్పడితే దానిని సరళరేఖా ప్రవృత్తి (Liner Trend) అంటారు. అలాకాకపోతే వక్రరేఖీయ ప్రవృత్తి (Non-Linear Trend) అంటారు. ఆచరణలో సాధారణంగా సరళరేఖా ప్రవృత్తులనే ఉపయోగిస్తారు. ఈ ప్రవృత్తులు ప్రారంభంలో నెమ్మదిగా ఉండి, కొంత కాలంపాటు పెరుగుతూ, ఆ తర్వాత కొంతకాలం స్థిరంగా ఉండి చివరకు తగ్గుతాయి.

4. కాలశ్రేణుల విశ్లేషణలో దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి విలువలను సామాన్య విలువలుగా తీసుకోబడతాయి. వీటి ఆధారంగా దత్తాంశాన్ని ప్రభావితం చేసే ఇతర అంశాలను అధ్యయనం చేయడం వీలవుతుంది.

2.3 ఋతు సంబంధ విచరణాలు (Seasonal Variations) :

ఒక వ్యాపార సంవత్సరంలో వ్యాపార ప్రక్రియలో కాలానుగుణంగా సంభవించే మార్పులను ఋతు మార్పులు లేదా ఋతు విచరణాలు అంటారు. ఈ మార్పులు ప్రతి సంవత్సరం పునరావృతం అవుతుంటాయి. దత్తాంశాన్ని వార్షిక సంఖ్యలుగా ఇచ్చినప్పుడు, దానిలో ఋతు సంబంధమైన హెచ్చుతగ్గులు ఉండవు. అనగా ఒక సంవత్సర కాలంలో గాని, అంతకంటే తక్కువ కాలంలో క్రమం తప్పకుండా నియతికాలికంగా ప్రతి సంవత్సరం ఇంచు మించుగా ఒకే రీతిలో సంభవించే మార్పులను ఋతు సంబంధ విచరణాలు అంటారు. ధరలు, అనేక వస్తువుల ఉత్పత్తి, వస్తువుల వినియోగం, వడ్డీ రేట్లు మొదలైన అనేక అంశాలు ఋతుసంబంధమైన మార్పులచే ప్రభావితమౌతాయి. ఋతు సంబంధ మార్పులకు కారణాలు : ఇవి ప్రధానంగా రెండు. ఒకటి సహజ కారణాలు, రెండు మానవ సాంప్రదాయాలు.

(ఎ) సహజ కారణాలు : ఋతు సంబంధ విచరణాలకు ముఖ్యకారణం సహజ శక్తులైనటువంటి వివిధ ఋతువులు, వాతావరణ స్థితిగతులు, వాతావరణ మార్పులు అని చెప్పవచ్చును. వర్షపాతం, తేమ, ఉష్ణోగ్రత మొదలైన వాతావరణ మార్పులు ఒక్కొక్క పరిశ్రమపై, వ్యాపారంపై వివిధ రకాల ప్రభావం చూపుతాయి. ఉదా : - వరి, గోధుమ, పప్పు ధాన్యాలు మొదలైన వాటి ఉత్పత్తి ఋతువులపై ఆధారపడి ఉంటుంది. అదే విధంగా ఉన్ని వస్త్రాలకు చలికాలంలో డిమాండ్ ఎక్కువగాను, చల్లని పానీయాలకు వేసవి కాలంలో ఎక్కువ డిమాండ్‌గాను ఉండడం.

(బి) మానవ సాంప్రదాయాలు : కాలశ్రేణులను ప్రభావితం చేసే రెండవ అంశం - సమాజంలోని ప్రజల అలవాట్లు, సాంప్రదాయాలు, ఆచారాలు, అభిరుచులు, కట్టుబాట్లు మొదలైనవి. ఉదా:- పెళ్ళిళ్ళకాలంలో, పండగల సమయంలో వస్త్రాలు, పంచదార మొదలైన వాటి అమ్మకాలు ఎక్కువగా ఉండడం.

కాలశ్రేణుల విశ్లేషణలో ఋతుసంబంధ విచరణాల అధ్యయనం చాలా ముఖ్యమైనది. ప్రవృత్తి నుండి వాటిని వేరుచేసి అధ్యయనం చేయడం వలన భవిష్యత్ కొనుగోళ్లు, అమ్మకాలు, ఉత్పత్తి ప్రకటన కార్యక్రమాలు మొదలైన వ్యాపార నిర్ణయాలు, చేయడానికి వ్యాపార విధానాలు రూపొందించడానికి వీలవుతుంది. ఋతు సంబంధ మార్పుల అవగాహన లేకపోతే ఒక ఋతువులో కలిగిన పెరుగుదలను పొరబాటున వ్యాపార ప్రోత్సాహస్థితి గాను, తగ్గుదలను వ్యాపార క్షీణత స్థితిగాను భావించే అవకాశం వుంది. ఋతు సంబంధ మార్పుల అధ్యయనం వలన వ్యాపార నిర్ణయాలు సక్రమంగా, వాస్తవానికి దగ్గరగా ఉంటాయి.

2.4 చక్రీయ విచరణాలు (Cyclical Variations) :

కాలశ్రేణులలో అధ్యయన కాలం 12 నెలలకు మించి ఉండి, తొమ్మిది లేదా పది సంవత్సరాల వరకు కొనసాగుతూ ఉండి, ఈ మధ్య కాలంలో మార్పులు లేదా విచరణాలు మళ్ళీ మళ్ళీ పునరావృతం అవుతూ ఉంటే వాటిని 'చక్రీయ విచరణాలు' అంటారు. ఇందులో నియతికాలికంగా వచ్చే పెరుగుదల లేదా తగ్గుదల ధోరణులు ఆర్థిక దత్తాంశములో అలలుగా కనిపిస్తాయి. అందుచేతనే వీటిని చక్రీయ హెచ్చుతగ్గులు అంటారు. డిమాండ్, సప్లయ్‌ల సమతుల్యతను ప్రభావితం చేసే అనేక సంక్లిష్ట శక్తుల సమ్మేళనం వలన వచ్చే ఈ మార్పులు మూడు నుంచి పది సంవత్సరాలలోపు ఎప్పుడైనా పునరావృతం కావచ్చును. వీటి కాలపరిమితి 12 నెలలకు మించడం వలన వీటిని "వ్యాపార చక్రాలు" అని కూడా అంటారు. చక్రీయ విచరణాలను దీర్ఘకాలమార్పులుగా పరిగణించవచ్చు. వీటిలో 4 దశలుంటాయి. అవి వ్యాపార విజృంభణ లేదా వ్యాపారం అభివృద్ధి చెందడం (Prosperity), క్షీణదశ లేదా అల్పమాంధ్యం (Recession), ఆర్థిక మాంధ్యం (Depression), పురోగతి లేదా పునరుద్దానం (Prosperity or Recovery). వ్యాపార చక్రంలో ఒక దశ తర్వాత మరొక దశ ఏర్పడుతుంది. ఒక్కొక్క దశలో వినియోగదార్ల అభిరుచులు, అలవాట్లు, కొనుగోలు శక్తి, డిమాండ్ ధరలు, మార్కెట్ స్థితిగతులు వేరువేరుగా ఉంటాయి. కాబట్టి వ్యాపార నిర్ణయాలు తీసుకోవడంలో వ్యాపారవేత్త ఈ

చక్రీయ మార్పులను తప్పనిసరిగా అధ్యయనం చేయవలె. దీనివలన వ్యాపార కార్యక్రమం ఒకరీతిగా ఉండేటట్లు అవసరమైన చర్యలు తీసుకోవడానికి వీలవుతుంది. అయితే వ్యాపార చక్రాలలో కాలపరిమితి స్థిరంగా ఉండదు. అందువలన చక్రీయమార్పుల విశ్లేషణ సక్రమంగా జరగకపోవచ్చును.

2.5 క్రమ రహిత విచరణాలు (Irregular Variations) :

వీటిని అవ్యవస్థిత (Erratic), యాదృచ్ఛిక, ఆకస్మిక హెచ్చుతగ్గులు అని కూడా అంటారు. ఇంతకు ముందు చర్చించిన మూడు విచరణాలకు ఇవి భిన్నమైనవి. వ్యాపార ప్రక్రియలో అనుకోని సంఘటనల వలన ఏర్పడే మార్పులను క్రమరహిత విచరణాలు అంటారు. ఇవి ఊహకు అందనివి. ఇవి పునరావృతం కావచ్చును లేదా కాకపోవచ్చును. ఉదా:- యుద్ధాలు, సమ్మెలు, లాకౌట్‌లు, వరదలు, కరువు కాటకాలు, భూకంపాలు, విప్లవాలు, అంటువ్యాధులు మొదలైనవి - వీటిని ముందుగా ఊహించలేము. కాబట్టి వీటిని అంచనా వేయడానికి అవకాశం ఉండదు. ఇవి నిర్ణీత స్వరూపాలను కలిగి ఉండవు. కాని వీటి ప్రభావం స్వల్పకాలమైనా, చాలా తీవ్రంగా ఉండి, కొత్తరకపు చక్రీయ లేదా ఇతర విచరణాలకు దారితీయవచ్చు. అయితే కాలశ్రేణుల విశ్లేషణలో చక్రీయ విచరణాలను క్రమరహిత విచరణాలను విడదీయడం కూడా కష్టమే.

2.6 ప్రశ్నలు

1. కాలశ్రేణులలోని మార్పులను గురించి వివరంగా చర్చించండి.
2. దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి అనగానేమి ?
3. ఋతు సంబంధ విచరణాల గురించి విశేషణాత్మకంగా వివరించండి.
4. చక్రీయ విచరణాలు అనగానేమి ?
5. క్రమరహిత విచరణాలు గురించి వివరించండి.

రచయిత

శ్రీ టి. నాగేశ్వరరావు

పాఠం 3 **ప్రవృత్తి గణన (Measurement of Trend)**

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యాంశం అధ్యయనం చేయడం వలన మీరు : -

* కాలశ్రేణులలో ప్రవృత్తిని కొలిచే వివిధ పద్ధతులను గురించి, వాటి ప్రయోజనాలను గురించి వివరంగా తెలుసుకొనగలరు.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

3.1 ప్రవృత్తిని కొలవడానికి కారణాలు :

ప్రవృత్తి (Trend) ని కొలవడానికి రెండు ప్రధాన కారణాలున్నాయి.

(ఎ) ప్రవృత్తిని అధ్యయనం చేయడం

(బి) ప్రవృత్తిని తొలగించి విశ్లేషించడం

(ఎ) **ప్రవృత్తిని అధ్యయనం చేయడం :-** ప్రవృత్తిని కొలవడానికి ప్రధాన కారణం ప్రవృత్తి లక్షణాలను అధ్యయనం చేయడం. అనగా ప్రవృత్తి ఏ దిశలో మార్పు చెందుతుందో పరిశీలించడం.

(బి) **ప్రవృత్తి తొలగింపు మరియు విశ్లేషణ :-** రెండవ కారణం ప్రవృత్తిని తొలగించి కాలశ్రేణులను ప్రభావితం చేసే మిగతా అంశాలను విశ్లేషణ చేయడం.

3.2 ప్రవృత్తిని కొలిచే పద్ధతులు :

కాలశ్రేణులలోని ప్రవృత్తిని(Trend) అధ్యయనం చేయడానికి, కొలవడానికి (Measurement) సాధరణంగా క్రింది పద్ధతులను ఉపయోగిస్తారు.

(ఎ) సరస వక్రరేఖా పద్ధతి (Freehand Curve method)

(బి) అర్ధమాధ్యమాల పద్ధతి (Semi Average method)

(సి) భవిత మాధ్యమాల పద్ధతి (Moving Average method)

(డి) కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి (Least Squares method)

3.3 సరస వక్రరేఖా పద్ధతి (Free Hand Curve Method) :

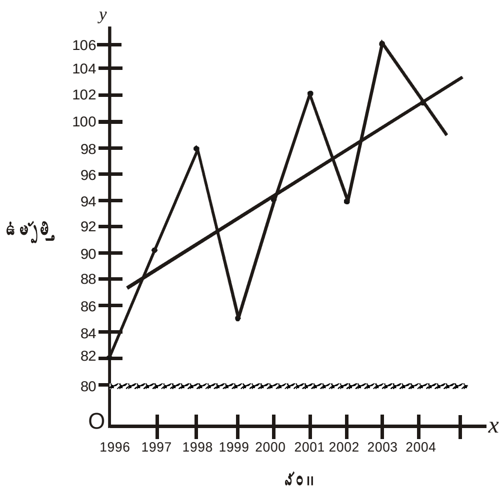
దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తిని అంచనా వేయడానికి ఇది సులభమైన, సరళమైన పద్ధతి. ఈ పద్ధతిలో కాలశ్రేణుల విలువలను కాగితం మీద బిందువులు గా గుర్తించి వక్రరేఖను గీయవలె. దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తికి ప్రాతినిధ్యం వహించే ఒక సరళరేఖను లేదా వక్రరేఖను అన్ని బిందువులు కలిసేటట్లుగా గీయవలె. ఈ ప్రక్రియ చేయడం వలన ఇతర అంశాలు అంటే ఋతు సంబంధ, చక్రీయ, క్రమరహిత హెచ్చుతగ్గులు తొలగించబడతాయి. దీనినే రేఖాపటాత్మక లేదా స్వేచ్ఛా రేఖానిర్మాణ పద్ధతి అని కూడా అంటారు.

ఉదాహరణ : 1 : క్రింది దత్తాంశానికి సరసరేఖా లేదా సరళరేఖ లేదా స్వేచ్ఛా రేఖాపద్ధతిలో ప్రకృతిరేఖ గీయండి.

సం॥	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
ఉత్పత్తి	82	90	98	86	94	102	94	106	102

(లక్షల టన్నుల్లో)

జవాబు : - సరసరేఖా పద్ధతిలో ప్రవృత్తి



వివరణ : ప్రవృత్తి రేఖను బట్టి ప్రవృత్తి విలువలు పెరిగే ధోరణిలో వున్నాయని చెప్పవచ్చును.

ప్రయోజనాలు :

1. ఇది చాలా సులభమైన కాలాన్ని ఆదా చేసే పద్ధతి. దీనిలో ఎలాంటి గణితీయ గణనలు వుండవు.
2. అన్ని రకాల ప్రవృత్తులను వివరించేందుకు ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించవచ్చును. ఉదా॥ సరళరేఖ, వక్రరేఖ
3. దత్తాంశాన్ని గ్రాఫ్ కాగితంపై బిందురూపంగా చూపగానే ప్రవృత్తికి సంబంధించిన గణితీయ నమూనాను స్థూలంగా అర్థం చేసుకొనవచ్చును.

లోపాలు :

1. దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించే వ్యక్తి తనకు ఇష్టమైన రీతిలో మలచి తదనుగుణంగా రేఖను ప్రభావితం చేసి తన వ్యక్తిగత పక్షపాతాన్ని చూపడానికి వీలుంటుంది.
2. ప్రవృత్తి కొలవడానికి రేఖ ఉపయోగపడదు.
3. ఈ పద్ధతిలో వ్యక్తిగత పక్షపాత నిర్ణయాలకు వీలున్నందువలన అంచనాలు కట్టడానికి ఉపయోగకారిగా ఉండదు.

3.4 అర్థమధ్యమాల పద్ధతి (Semi Averages Method) :

'మధ్యమం' అనగా సగటు 'అర్థ' అనగా సగం (Half). 'అర్థమధ్యమం' అనగా సగం అంకెల సగటు అని అర్థం. అనగా దత్తాంశంలో మొదటి సగం అంకెలకు అంక మధ్యమం లెక్కించవలె. రెండవ సగం అంకెలకు అంక మధ్యమం లెక్కించవలె. (దత్తాంశంలో బేసి సంఖ్య ఉంటే, అందులోని మధ్యలో ఉన్న విలువను వదిలివేయవలె). ఈ రెండు అంక మధ్యమాల విలువలను గ్రాఫ్ కాగితంపై బిందువులుగా గుర్తించి, ఈ రెండు బిందువులను కలుపుతూ సరళరేఖ గీయవలె. దీనినే "ప్రవృత్తి రేఖ" అంటారు.

ఉదా : దత్తాంశంలో 6 సంవత్సరాల విలువలు ఇవ్వబడితే - అందులో మొదటి మూడు సంవత్సరాల విలువల యొక్క అంకమధ్యమం లెక్కించి 2వ సంవత్సరం విలువకు ఎదురుగా వ్రాయవలె. చివరి మూడు సంవత్సరాల విలువల యొక్క అంకమధ్యమం లెక్కించి 5వ సంవత్సరం విలువకు ఎదురుగా వ్రాయవలె. దత్తాంశంలో 7 సంవత్సరాల విలువలు ఇవ్వబడితే - అందులో నాల్గవ సంవత్సరం విలువను వదిలివేసి, మొదటి మూడు సంవత్సరాలకు అంకమధ్యమం (1, 2, 3 సంవత్సరాలకు) లెక్కించి 2వ సంవత్సరానికి ఎదురుగా వ్రాయవలె. చివరి 3 సంవత్సరాలకు (5, 6, 7 సంవత్సరాలకు) అంకమధ్యమం లెక్కించి 6వ సంవత్సరానికి ఎదురుగా వ్రాయవలె. రెండు అంకమధ్యమాల విలువలను గ్రాఫ్ కాగితంపై బిందువులుగా గుర్తించి, రెండు బిందువులను కలుపుతూ సరళరేఖ గీయవలె. అంచనా వేయవలసిన సంవత్సరం ఆధారంగా ఈ ప్రవృత్తి రేఖను పొడిగించి, భవిష్యత్కాలానికి విలువను అంచనా వేస్తారు.

ప్రయోజనాలు :

1. ఈ పద్ధతి అర్థం చేసుకోవడానికి తేలికగాను, గణించడానికి సులభంగాను ఉంటుంది.
2. ఇది చాలా హేతుబద్ధమైన పద్ధతి. ఇందులో ఎవరికైననూ ఒకే విలువలు లభిస్తాయి.
3. ఈ రేఖను రెండు వైపులా పొడిగించి భవిష్యత్ లేదా భూతకాలాలకు అంచనాలు వేయవచ్చు.

పరిమితులు :

1. ఈ పద్ధతి దత్తాంశములోని అంత్య విలువల మీద ఆధారపడి ఉంటుంది. కావున లెక్కించబడే అర్థమధ్యమాలు కూడా వాటి మీద ఆధారపడతాయి. అందుచేత ప్రవృత్తి రేఖ నిజమైన పెరుగుదల లేదా తగ్గుదలను సూచించదు.

2. కాలాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా వర్గీకరించడం వలన వ్యాపార చక్రాలు పూర్తి అయి ఉంటాయనే నమ్మకం లేదు. ముఖ్యంగా దత్తాంశకాలం మరీ తక్కువగా ఉంటే ఇలా అవుతుంది.

3. దత్తాంశములో సంవత్సరాలు బేసి సంఖ్యలో ఉన్నప్పుడు, సమభాగాలుగా చేయడానికి మధ్య సంవత్సరం వదిలివేయబడుతుంది. దాని వలన ఆ విలువ ప్రభావం ప్రవృత్తి రేఖలో కనుపించదు.

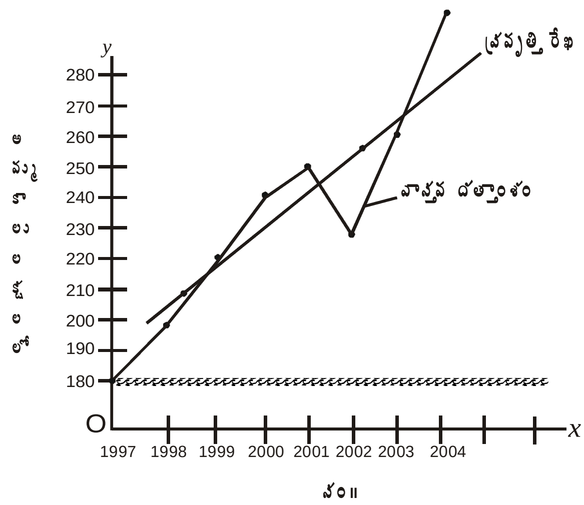
ఉదా : 2 ఒక కంపెనీ అమ్మకాలు ఇలా ఉన్నాయి.

సం॥	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
అమ్మకాలు (లక్షలలో)	180	200	220	240	250	230	260	280

అర్థమధ్యమాల పద్ధతి ద్వారా ప్రవృత్తి రేఖను గీయండి.

జవాబు :

సం॥	అమ్మకాలు	
1997	180	
1998	200	840 ÷ 4 = 210
1999	220	
2000	240	
2001	250	
2002	230	1020 ÷ 4 = 255
2003	260	
2004	280	



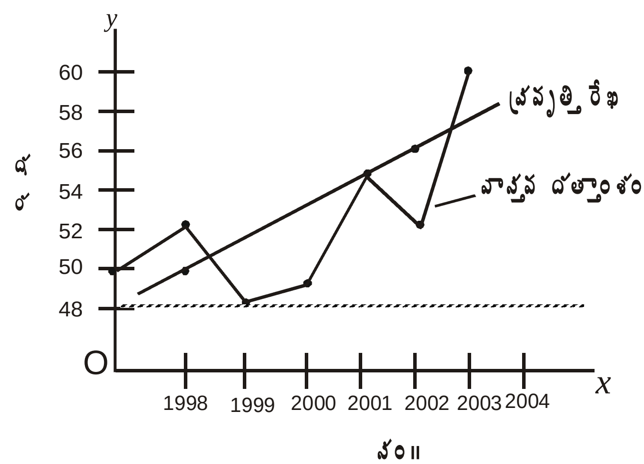
ఉదా - 3 : ఒక వస్తువు ధర 7 సంవత్సరాలలో ఇలా వుంది.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
ధర(రూ॥)	50	52	48	49	55	53	60

అర్ధమాధ్యమాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి రేఖను గీయండి.

జవాబు :

సం॥	ధర	
1998	50	
1999	52	150 ÷ 3 = 50
2000	48	
2001	49	ఈ విలువను వదిలివేయవలె.
2002	55	
2003	53	168 ÷ 3 = 56
2004	60	



3.5 చలిత మాధ్యమాల పద్ధతి (Moving Average Method) :

ఇది ప్రవృత్తులను కొలిచే సులభమైన, సరళమైన పద్ధతి. ఈ పద్ధతిలో దత్తాంశములోని ఋతు సంబంధ మరియు ఇతర స్వల్పకాలిక హెచ్చుతగ్గులు సగటుగా మార్చబడతాయి. దీని వలన ప్రవృత్తి (Trend) మాత్రమే స్పష్టమవుతుంది. ఈ విధంగా సగటు చేయడం వలన దత్తాంశంలోని ఒడి దుడుకులు, హెచ్చుతగ్గులు సరి అవుతాయి. చలిత మాధ్యమాన్ని లెక్కించడానికి ముందుగా చలిత మాధ్యమ కాలాన్ని నిర్ణయించవలె. ఆ కాలం 2 లేదా 3 లేదా 4 లేదా 5 లేదా 6 సంవత్సరాలు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ కావచ్చును. ఎంపిక చేసిన కాలం కాలచక్రపు వ్యవధితో సరిపోవలె.

ఉదా : - 2 సంవత్సరాల కాలానికి చలిత మాధ్యమం లెక్కించే పద్ధతి ఇలా ఉంటుంది.

$$\frac{A+B}{2};\ \frac{B+C}{2};\ \frac{C+D}{2};\ \frac{D+E}{2};\ \frac{E+F}{2};\ \frac{F+G}{2}$$ = లభించిన విలువలను రెండింటి మధ్యగా చూపవలె.

3 సంవత్సరాల కాలానికి చలిత మాధ్యమం లెక్కించే పద్ధతి ఇలా వుంటుంది.

$$\frac{A+B+C}{3};\ \frac{B+C+D}{3};\ \frac{C+D+E}{3};\ \frac{D+E+F}{3};\ \frac{E+F+G}{3}$$ = లభించిన విలువలను రెండవ అంశానికి ఎదురుగా చూపవలె.

4 సంవత్సరాల కాలానికి చలిత మాధ్యమం లెక్కించే పద్ధతి ఇలా ఉంటుంది.

$$\frac{A+B+C+D}{4};\ \frac{B+C+D+E}{4};\ \frac{C+D+E+F}{4};\ \frac{D+E+F+G}{4}$$ = లభించిన విలువలను రెండవ మరియు మూడవ అంశాలకు మధ్యగా చూపవలె.

5 సంవత్సరాల కాలానికి చలిత మాధ్యమం లెక్కించే పద్ధతి ఇలా ఉంటుంది.

$$\frac{A+B+C+D+E}{5};\ \frac{B+C+D+E+F}{5};\ \frac{C+D+E+F+G}{5};\ \frac{D+E+F+G+H}{5}$$ = లభించిన విలువలను మూడవ అంశానికి ఎదురుగా చూపవలె.

అనగా ప్రతిసారీ మొదటి అంశాన్ని వదలివేసి, తదుపరి అంశాన్ని తీసుకొంటూ చివరి వరకు మాధ్యమాలు (సగటులు) లెక్కించవలె. 'చలిత' అనగా 'కదలుట', 'మాధ్యమం' అనగా 'సగటు' అంటే మాధ్యమం చలిత మౌతుంది కాబట్టి "దీనిని చలిత మాధ్యమం" అంటారు.

ఉదా - 4 : దిగువ దత్తాంశం నుంచి 2 సంవత్సరాల మరియు 3 సంవత్సరాల చలిత మాధ్యమాల కనుగొనండి.

సం॥	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
లాభాలు (కోట్లలో)	15	18	17	20	23	25	27	33	36	40

జవాబు : 2 సంవత్సరాల చలితమాధ్యమం గణన :

సం॥	లాభం(కోట్లలో)	2 సం॥ల మొత్తం	2 సం॥ల చలిత మాధ్యమం
1995	15		
		33	16.5 (33 ÷ 2)
1996	18		
		35	17.5 (35 ÷ 2)
1997	17		
	37	18.5 (37 ÷ 2)	

1998	20		
		43	21.5 (43 ÷ 2)
1999	23		
		48	24.0 (48 ÷ 2)
2000	25		
		52	26.0 (52 ÷ 2)
2001	27		
		60	30.0 (60 ÷ 2)
2002	33		
		69	34.5 (69 ÷ 2)
2003	36		
		70	38.0 (76 ÷ 2)
2004	40		

3 సంవత్సరాల చలితమాధ్యమం గణన :

సం॥	లాభం(కోట్ల రూ॥)	3 సం॥ల మొత్తం	3 సం॥ల చలిత మాధ్యమం	స్వల్పకాలిక హెచ్చుతగ్గులు
1995	15			
1996	18	50	16.67 (50 ÷ 3)	+1.33 (18 - 16.67)
1997	17	55	18.33 (55 ÷ 3)	-1.33 (17 - 18.33)
1998	20	60	20.00 (60 ÷ 3)	0 (20 - 20)
1999	23	68	22.67 (68 ÷ 3)	+0.33 (23 - 22.67)
2000	25	75	25.00 (75 ÷ 3)	0 (25 - 25)
2001	27	85	28.33 (85 ÷ 3)	-1.33 (27 - 28.33)
2002	33	96	32.00 (96 ÷ 3)	+1.00 (33 - 32)
2003	36	109	36.33 (109 ÷ 3)	- 0.33 (36 - 36.33)
2004	40			

ఉదా - 5 : క్రింది దత్తాంశము నుంచి 4 సం॥ల చలిత మాధ్యమాలు కనుగొని కేంద్రీకృత సగటులను గణన చేయండి.

సం॥	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
ఉత్పత్తి (మెట్రిక్ టన్నులు)	25	27	30	28	24	26	31	29	33	34

జవాబు : 4 సంవత్సరాల చలిత మాధ్యమం గణన :

సం॥	ఉత్పత్తి(మె॥టన్నుల్లో)	4 సం॥ల మొత్తం	4 సం॥ల చలిత మాధ్యమం (= ÷ 4)	2 కాలాల మొత్తం	కేంద్రీకృత సగటు (÷ 2)
1995	25				
1996	27				
		11	27.5	54.75	27.375
1997	30				
		109	27.25	54.75	27.375
1998	28				
		108	27.0	54.25	27.125
1999	24				
		109	27.25	54.75	27.375
2000	26				
		110	27.5	54.75	27.375
2001	31				
		119	29.75	57.25	28.625
2002	29				
		127	31.75	61.50	30.750
2003	33				
2004	34				

చలిత మధ్యమాల పద్ధతి ప్రయోజనాలు :

1. దీనిని అర్థం చేసుకోవడం, గణన చేయడం, అవగాహన చేసుకోవడం చాలా తేలిక.
2. ఈ పద్ధతి మార్పులకు అనుకూలమైనది (Flexible). దత్తాంశానికి అదనంగా కొన్ని పరిశీలనలు చేరిస్తే, కొన్ని అదనపు విలువలు లభిస్తాయి. అయితే ఈ అదనపు విలువల వలన అసలు విలువలలో మార్పేమీ ఉండదు.
3. ఋతు సంబంధ మార్పులు, చక్రీయ మార్పులు, క్రమరహిత మార్పులు అధ్యయనం చేయడానికి కూడా ఈ పద్ధతి ఉపయోగపడుతుంది.
4. దత్తాంశంలో ఎక్కువ విలువలు అంటే, యాధృచ్ఛిక మార్పులను కూడా తొలగించడం సాధ్యమవుతుంది.
5. దత్తాంశ స్వభావమును బట్టి చలిత మాధ్యమాల కాలం నిర్ణయించబడుతుంది. కాబట్టి వ్యక్తిగత పక్షపాత వైఖరికి అవకాశం ఉండదు.

పరిమితులు :

1. ఈ పద్ధతి ద్వారా భవిష్యత్ కాలానికి విలువలను అంచనా వేయుటకు కుదరదు.
2. దత్తాంశంలోని అన్ని విలువలకు ప్రవృత్తి లెక్కించుటకు కుదరదు. ఉదా. 3 సం॥ల చలిత మాధ్యమం లెక్కించినపుడు మొదటి మరియు చివరి సంవత్సరాలకు ప్రవృత్తి విలువలుండవు.
3. చలిత మాధ్యమ కాల నిర్ణయం గణాంక శాస్త్రజ్ఞుడి పరిశీలనపై ఆధారపడి వుంటుంది.
4. యాదృచ్ఛిక మార్పులను ఈ పద్ధతి పూర్తిగా తొలగించలేదు.
5. ఒక కాలచక్రగతి మారినపుడు ఈ పద్ధతి ఆశించిన ఫలితాలను సాధించలేదు.
6. దత్తాంశంలో చివరి విలువలు (Extreme Values) చలితమాధ్యమాలను ఎక్కువ ప్రభావితం చేస్తాయి.

3.6 కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి (Least Squares Method) :

ప్రవృత్తి విలువలను కొలిచే పద్ధతులలో ఇది అత్యంత ప్రాముఖ్యమైనది. దీనిని "సుష్టతమ సామీప్య రేఖ"(Line of Best Fit) అని కూడా అంటారు. ఇది సులభంగాను, ఆచరణ యోగ్యంగాను ఉండి రేఖా నిర్మాణానికి వీలుగా ఉంటుంది. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో బీజీయ (Algebric) సూత్రాలను ఉపయోగించి ప్రవృత్తిని కనుగొనవచ్చును. ఈ పద్ధతి ద్వారా నిర్మించిన ప్రవృత్తి రేఖను 'శ్రేష్టమైన రేఖ' (Line of Best Fit) అంటారు. శ్రేష్టమైన రేఖకు రెండు వైపులా ఉన్న ధనాత్మక (+), ఋణాత్మక (-) విచలనాల మొత్తం 'సున్నా'కు సమానమవుతుంది. అనగా అసలు విలువలకు ప్రవృత్తి విలువలకు గల విచలనాల మొత్తం సున్నాకు సమానమవుతుంది. $\left[\sum(y-y_c)=0\right]$. అంతేకాక అసలు విలువ (y) మరియు ప్రవృత్తి విలువ (y_c)ల మధ్యగల విచలనాల వర్గాల మొత్తం $\sum(y-y_c)^2$ కనిష్టంగా ఉంటుంది. అందుచేతనే దీనిని "కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి" అంటారు. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని క్రింది సమీకరణం ద్వారా కనుగొంటారు.

ఇక్కడ $y_c = a + b\ dx$

y_c సరళరేఖా ప్రవృత్తి

a = y విలువల అంకమధ్యమం $\left(\frac{\sum y}{N}\right)$

b = మార్పురేటు లేదా ప్రవృత్తి రేఖ వాలు $\left(\frac{\sum dxy}{\sum dx^2}\right)$

dx = ఊహించిన సగటు నుంచి విచలనం.

$\sum dx = 0$ అయితే a, b ల విలువల కోసం పై సూత్రాలు ఉపయోగించవలె. అయితే $\sum dx \neq 0$ అయినచో a, b ల విలువలు లెక్కించడానికి క్రింది సమీకరణాలను ఉపయోగిస్తారు.

$$\sum y = Na + b\sum dx \quad \text{-----------} \quad (1)$$

$$\sum dx\,y = a\sum dx + b\sum dx^2 \quad \text{-----------(2)}$$

కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి విలువలు గణించడానికి క్రింది పద్ధతిని అనుసరించవలె.

1. దత్తాంశములోని కాలాన్ని (సం॥ లేదా నెలలను) 'x' గాను, వాటి విలువలను 'y'గాను గుర్తించవలె. y విలువలు కూడితే $\sum y$ అవుతుంది.

2. ఊహించిన సగటును సంవత్సరాల నుండి తీసుకొనవలె. ఇచ్చిన సంవత్సరాలలో మధ్యలో ఉన్న సంవత్సరాన్ని ఊహించిన సగటు తీసుకోవలె. అనగా వాటి విచలనాలు కూడితే '0'తో సమానం అయ్యే విధంగా ఊహించిన సగటును తీసుకొనవలె ($\sum dx = 0$).

3. విచలనాలకు వర్గాలు $\left(dx \times dx = dx^2\right)$ లెక్కించవలె. వాటి మొత్తం $\sum dx^2$ అవుతుంది.

4. y విలువలకు విచలనాల విలువలను (dx) హెచ్చించి వాటిని కూడవలె. ($\sum dxy$)

5. a విలువ b విలువ కనుగొని వాటి ఆధారంగా సమీకరణ సాయంతో ప్రవృత్తి విలువలు $\left(y_c\right)$ లెక్కించవలె.

$$a = \frac{\sum y}{N}$$

$$b = \frac{\sum dx\,y}{\sum dx^2}$$

$$y_c = a + b\,dx$$

సుగుణాలు :

1. ఇది గణితీయ సూత్రం ఆధారంగా ప్రవృత్తి విలువలను లెక్కించే పద్ధతి. కాబట్టి చాలా హేయబద్ధమైనది.
2. ప్రవృత్తిని కనుగొనుటకు బీజీయ పద్ధతులను పాటించడం వలన గణాంకవేత్త పక్షపాత బుద్ధికి అవకాశం వుండదు.
3. ఇది చాలా ప్రాచుర్యం పొందిన, ఆదర్శమైన(Ideal), పద్ధతి. ఎందుచేతనంటే, అసలు విలువల నుంచి ప్రవృత్తి విలువలు తీసివేయగా వచ్చిన విచలనాల మొత్తం సున్నా అవుతుంది, విచలనాల వర్గాల మొత్తం కనిష్టంగా ఉంటుంది.
4. భవిష్యత్ గురించి అంచనా వేసేందుకు, ఇది చాలా ఉపయోగకరమైనది.
5. దత్తాంశంలోని అన్ని సంవత్సరాలకు ప్రవృత్తి లెక్కించవచ్చును.

లోపాలు :

1. దీనిని లెక్కించుట, అర్థం చేసుకొనుట చాలా కష్టమైనది.
2. దత్తాంశంలోని విలువల సంఖ్య తక్కువగా ఉన్నప్పుడు ఈ పద్ధతి ఆమోదయోగ్యంగా ఉండదు.
3. ఇచ్చిన దత్తాంశానికి మరికొన్ని అంశాలు చేర్చినట్లయితే ప్రవృత్తి సమీకరణంను తిరిగి లెక్కించవలె.

ఉదా - 6 : దిగుత దత్తాంశము నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. **2006**వ సం॥కి అమ్మకాలను అంచనా వేయండి.

సం॥	1999	2000	2001	2002	2003
అమ్మకాలు	70	74	80	86	90

(కోట్ల రూ॥లలో)

జవాబు : కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తిని గణన చేయడం.

సం॥	అమ్మకాలు	dx	dx^2	dxy	y_c
1999	70	-2	4	-140	69.6
2000	74	-1	1	-14	74.8
2001	80	0	0	0	80.0
2002	86	+1	1	+86	85.2
2003	90	+2	4	+180	90.4
N = 5	400	0	10	52	

$$a = \frac{\sum y}{N} = \frac{400}{5} = 80$$

$$b = \frac{\sum dx\,y}{\sum dx^2} = \frac{52}{10} = 5.2$$

$$y_c = a + b\,dx$$

1999 = 80 + 5.2(-2)

= 80 - 10.4 = 69.6

2000 = 80 + 5.2 (-1)

= 80 - 5.2 = 74.8

2001 = 80 + 5.2(0) = 80

2002 = 80 + 5.2(1)

= 80 + 5.2 = 85.2

2003 = 80 + 5.2(2)

= 80 + 10.4 = 90.4

2006 వ సంవత్సరానికి అంచనా :

$a = 80$

$b = 5.2$

$dx =$ 2003 సం॥ = + 2

2004 సం॥ = +3

2005 సం॥ = +4

2006 సం॥ = +5

2003 = $a + b\ dx$

= 80 + 5.2(5)

= 80 + 26.0

= 106

సంవత్సరములు సరిసంఖ్యలు ఇచ్చినపుడు

ఉదా - 8 : క్రింది దత్తాంశము నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. **2008**వ సంవత్సరానికి విలువలను అంచనా వేయండి.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003
విలువలు	83	92	71	90	169	191

జవాబు : సరళరేఖా పద్ధతిలో ప్రవృత్తి విలువలు లెక్కించడం.

x	y	dx	dx^2	dxy	y_c
1998	83	-2.5	6.25	-207.5	59.575
1999	92	-1.5	2.25	-138.0	82.145
2000	71	-0.5	0.25	-35.5	104.715
		0	0	0	
2001	90	+0.5	0.25	45.0	127.285
2002	169	+1.5	2.25	253.5	149.855
2003	191	+2.5	6.25	477.5	172.425
$N = 6$	696	0	17.5	395.0	

$$a = \frac{\sum y}{N} = \frac{696}{6} = 116$$

$$b = \frac{\sum dxy}{\sum dx^2} = \frac{395}{17.5} = 22.57$$

$$y_c = a + b\,dx$$

1998 = 116 + 22.57 (- 2.5)

= 116 - 56.425 = 59.575

1999 = 116 + 22.57 (-1.5)

= 116 - 33.855 = 82.145

2000 = 116 + 22.57 (-0.5)

= 116 - 11.285 = 104.715

2001 = 116 + 22.57 (0.5)

= 116 + 11.285 = 127.285

2002 = 116 + 22.57 (1.5)

= 116 + 33.855 = 149.855

2003 = 116 + 22.57 (2.5)

= 116 + 56.425 = 172.425

2008కి అంచనా : a = **116**

b = 22.57

dx = 2003కు 2.5

2004కు 3.5

2005కు 4.5

2006కు 5.5

2007కు 6.5

2008కు 7.5

2008కి అంచనా : = 116 + 22.57 (7.5)

= 116 + 169.275 = 285.275

గమనిక : 0.5 ; 1.5 ; 2.5 అనే బదులుగా వాటిని 2 చేత హెచ్చించి సాధారణ అంకెలుగా అనగా 0.5 బదులుగా 1; 1.5 బదులుగా 3; 2.5 బదులుగా 5 అని మార్చుకొనవచ్చును.

x	y	dx	dx^2	dxy	y_c
1998	83	-5	25	-415	59.57
1999	92	-3	9	-276	82.14
2000	71	-1	1	-71	104.71
		0	0		
2001	90	+1	1	+90	127.285
2002	169	+3	9	+507	149.85
2003	191	+5	25	+955	172.42
N = 6	696	0	70	790	

$$a=\frac{\sum y}{N}=\frac{696}{6}=116$$

$$b=\frac{\sum dxy}{\sum dx^2}=\frac{790}{70}=11.2857$$

$$y_c=a+b\,dx$$

1998 = 116 + 11.2857 (-5)

= 116 - 56.4286 = 59.571

1999 = 116 + 11.2857 (-3)

= 116 - 33.8571 = 82.14

2000 = 116 + 11.2857 (-1)

= 116 - 11.2857 = 104.71

2001 = 116 + 11.2857 (1)

= 116 + 11.2857 = 127.2857

2002 = 116 + 11.2857 (5)

= 116 + 56.4286 = 172.4286

2008కి అంచనా : a = 116

b = 11.2857

dx = 2003కు 5

2004కు 7

2005కు 9

2006కు 11

2007కు 13

2008కు 15

2008కి అంచనా = 116 + 11.2857 (15)

= 116 + 169.2855 = 285.275

ఉదా - 9 : కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళ రేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి.

సం॥	1928	1938	1948	1958	1968	1978	1988	1998
హర్యానా రాష్ట్ర జనాభా (మి॥లలో)	3.9	5.3	7.3	9.6	12.9	17.1	22.2	30.5

హర్యానా రాష్ట్ర జనాభాను 2003కు అంచనా వేయండి.

x	y	dx	dx^2	dxy	y_c
1928	3.9	-7	49	-27.3	0.93
1938	5.3	-5	25	-26.5	4.55
1948	7.3	-3	9	-21.9	8.17
1958	9.6	-1	1	-9.6	11.79
		0			
1968	12.9	+1	1	+12.9	15.41
1978	17.1	+3	9	+51.3	19.03
1988	22.2	+5	25	+111.0	22.65
1998	30.5	+7	49	+213.5	26.27
N = 8	108.8	0	168	303.4	

$$a = \frac{\sum y}{N} = \frac{108.8}{8} = 13.6$$

$$b = \frac{\sum dxy}{\sum dx^2} = \frac{303.4}{168} = 1.81$$

$$y_c = a + b\ dx$$

1928 = 13.6 + 1.81 (-7)

= 13.6 - 12.67 = 0.93

1938 = 13.6 + 1.81 (-5)

= 13.6 - 9.05 = 4.55

1948 = 13.6 + 1.81 (-3)

= 13.6 - 5.43 = 8.17

1958 = 13.6 + 1.81 (-1)

= 13.6 - 1.81 = 11.79

1968 = 13.6 + 1.81 (1)

= 13.6 + 1.81 = 15.41

1978 = 13.6 + 1.81 (3)

= 13.6 + 5.43 = 19.03

1988 = 13.6 + 1.81 (5)

= 13.6 + 9.05 = 22.65

1998 = 13.6 + 1.81 (7)

= 13.6 + 12.67 = 26.27

2003కు అంచనా : a = 13.6

b = 1.81

dx = 1998కు = +7

2008కు = +9

2003కు = +8 (7 మరియు 9ల మధ్యవిలువ)

2003కు అంచనా : 13.6 + 1.81 (8)

13.6 + 14.48 = 28.08

ఉదా - 10 : క్రింది దత్తాంశానికి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి.

సం॥	1991	1993	1995	1997	1999	2001	2003
ఉత్పత్తి	25	27	32	36	44	55	69

2004వ సంవత్సరానికి ఉత్పత్తిని అంచనా వేయండి.

జవాబు : కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి గణన : -

x	y	dx	dx^2	dxy	y_c
1991	25	-3	9	-75	19.72

1993	27	-2	4	-54	26.86
1995	32	-1	1	-32	34.00
1997	36	0	0	0	41.14
1999	44	+1	1	44	48.28
2001	55	+2	4	110	55.42
2003	69	+3	9	207	62.56
N = 7	288	0	28	200	

$$a = \frac{\sum y}{N} = \frac{288}{7} = 41.14$$

$$b = \frac{\sum dxy}{\sum dx^2} = \frac{200}{28} = 71.4$$

$$y_c = a + b\,dx$$

1991 = 41.14 + 7.14 (-3)

= 41.14 - 21.42 = 19.72

1993 = 41.14 + 71.4 (-2)

= 41.14 - 14.28 = 26.86

1995 = 41.14 + 7.14(-1)

= 41.14 - 7.14 = 34.00

1997 = 41.14 + 7.14 (0)

= 41.14 + 0 = 41.14

1999 = 41.14 + 7.14 (1)

= 41.14 + 7.14 = 48.28

2001 = 41.14 + 7.14 (2)

= 41.14 + 14.28 = 55.42

2003 = 41.4 + 7.14 (3)

= 41.14 + 21.42 = 62.56

2004కు అంచనా : a = 4.14

b = 7.14

dx = 2003కు 3

= 2005కు 4

= 2004కు 3.5 (3కు 4కు మధ్య విలువ)

2004కు అంచనా : $a+b\,dx$

= 41.14 + 7.14 (3.5)

= 41.74 + 24.99 = 66.13

ఉదా - 11 : కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి.

సం॥	1989	1991	1992	1993	1994	1995	1998
అమ్మకాలు	140	144	160	152	168	176	180

1996వ సంవత్సరానికి అంచనా వేయండి.

జవాబు :

x	y	dx	dx^2	dxy	y_c
1989	140	-4	16	-560	139.45
1991	144	-2	4	-288	149.37
1992	160	-1	1	-160	154.33
1993	152	0	0	0	159.29
1994	168	+1	1	+168	164.25
1995	176	+2	4	+352	169.21
1998	180	+5	25	+900	184.09
13952	1120	1	51	412	

ఇక్కడ ఇవ్వబడిన దత్తాంశంలో 1990 మరియు 1996, 1997 యొక్క విలువలు లేవు. ఊహించిన సగటుగా ఏ సం॥ తీసుకున్నను $\sum dx=0$ తో సమానం కాదు. అందుచేత ఇచ్చిన సంవత్సరాల యొక్క సగటును ఊహించిన సగటుగా తీసుకొనవలె.

$$\frac{13952}{7}=1993$$

అనగా 1993ను ఆధారంగా తీసుకొనవలె.

$\sum dx \neq 0$ అయినందున ($\sum dx$ not equal to zero) a, b ల విలువలు క్రింది సమీకరణాల ద్వారా సాధించవలె.

$\sum y = Na + b\sum dx$ ------------ (1)

$\sum dxy = \sum dx.a + b.\sum dx^2$ ------ (2)

$1120 = 7a + b1$ ---------------- (1)

$412 = 1a + b\,51$ --------------- (2)

లేదా

$7a+b=1120$ ----------------- (1)

$a+51b=412$ ----------------- (2)

లేదా

$7a+\quad b=1120$ ----------------- (1)

$-7a+357b=2884$ ----------------- (2)

$356b=1764$

$$b=\frac{1764}{356}=4.96$$

b విలువను (1)వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$7a+4.96(1)=1120$

$7a+4.96=1120$

$7a=1120-4.96$

$7a=1115.04$

$$a=\frac{1115.04}{7}$$

$a=159.29$

$y_c=a+b\,dx$

1989 = 159.29 + 4.96(-4)

= 159.29 - 19.84 = 139.45

1991 = 159.29 + 4.96(-2)

= 159.29 - 9.92 = 149.37

1992 = 159.29 + 4.96(-1)

= 159.29 - 4.96 = 154.33

1993 = 159.29 + 4.96(0) = 159.29

1994 = 159.29 + 4.96(1)

= 159.29 + 4.96 = 164.25

1995 = 159.29 + 4.96(2)

= 159.29 + 9.92 = 169.21

1998 = 159.29 + 4.96 (5)

= 159.29 + 24.8 = 184.09

1996వ సంవత్సరానికి అంచనా :

a = 159.29

b = 4.96

dx = 1995కు = 2

1996కు = 3

1996 = 159.29 + 4.96(3)

= 159.29 + 14.88 = 174.17

ఉదా - 12 : చక్కెర పరిశ్రమలో ఉత్పత్తి వివరాలు మిలియన్ టన్నులలో ఇలా వుంది.

సం॥	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
ఉత్పత్తి (మి॥ట॥)	12	10	14	11	13	15	16

పై దత్తాంశము నుంచి ఆధార సం॥ మార్చి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. 1999 మరియు 2001 సంవత్సరాలకు ఉత్పత్తి అంచనా వేయండి..

జవాబు : సంవత్సరాలు బేసి సంఖ్య(7)గా ఇవ్వబడినాయి. మధ్య సంవత్సరాన్ని, 1995ను, ఆధారంగా చేసుకొంటే $\sum dx$ సున్నాతో సమానమవుతుంది. అయితే ఆధార సంవత్సరం మార్చమని ఇవ్వబడింది. కాబట్టీ, 1995కు బదులుగా 1991ను ఆధారంగా తీసుకుని a మరియు b విలువలను సమీకరణాల పద్ధతి ద్వారా కనుగొనవలె.

x	y	dx	dx^2	dxy	y_c
1992	12	+1	1	12	10.75
1993	10	+2	4	20	11.50
1994	14	+3	9	42	12.25
1995	11	+4	16	44	13.00
1996	13	+5	25	65	13.75
1997	15	+6	36	90	14.50
1998	16	+7	49	112	15.25
$N = 7$	91	28	140	385	

ఆధార సంవత్సరము : 1991

$\sum y = Na + b\sum dx$ ---------------- (1)

$\sum dxy = a\sum dx + b\sum dx^2$ ------------(2)

$91 = 7a + 28b$ ---------- (1)

$385 = 28a + 140b$ --------- (2)

$7a + 28b = 91$-------- (1) $(\times 4)$

$28a + 140b = 385$-------- (2)

Or

$28a + 112b = 364$ ---------- (1)

$28a + 140b = 385$ ---------- (2)

$28b = 21$

$b = \frac{21}{28}$

$b = 0.75$

b విలువను 1వ సమీకరణంలో ప్రతిక్షేపించగా

$7a + 28(0.75) = 91$

$7a + 21 = 91$

$7a = 91 - 21$

$7a = 70$

$a = \frac{70}{7}$

$a = 10$

$a = 10,\ b = 0.75$

$y_c = a + b\,dx$

1992 = 10 + 0.75(1)

= 10 + 0.75 = 10.75

1993 = 10 + 0.75(2)

= 10 + 1.50 = 11.50

1994 = 10 + 0.75(3)

= 10 + 2.25 = 12.25

1995 = 10 + 0.75(4)

= 10 + 3.00 = 13.00

1996 = 10 + 0.75 (5)

= 10 + 3.75 = 13.75

1997 = 10 + 0.75(6)

= 10 + 4.50(7) = 14.50

1998 = 10 + 0.75(7)

= 10 + 5.25 = 15.25

1999 మరియు 2001కి అంచనా : a = 10

b = 0.75

dx = 1998 = 7

1999 = 8

2000 = 9

2001 = 10

1999 = 10 + 0.75(8)

= 10 + 6.00 = 16.00

2001 = 10 + 0.75 (10)

10 + 7.50 = 17.50

ఉదా - 13 : ఒక దుకాణంలో వార్షిక అమ్మకాలు ఇలా ఉన్నాయి.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
అమ్మకాలు (వేలల్లో)	120	130	135	125	145	150	140

పై దత్తాంశం నుంచి 1) కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తి విలువను గణన చేయండి.

2) అమ్మకాలు నెలసరి పెరుగుదలను కనుగొనండి.

3) సంకలన మరియు గుణకార పద్ధతులలో ప్రవృత్తి విలువలను తొలగించండి.

జవాబు : (1)

x	y	dx	dx^2	dxy	y_c
1998	120	-3	9	-360	123.21
1999	130	-2	4	-260	127.14
2000	135	-1	1	-135	131.07
2001	125	0	0	0	135.00
2002	145	+1	1	+145	138.93
2003	150	+2	4	+300	142.86
2004	140	+3	9	+420	146.79
N =7	945	0	28	110	

$$a = \frac{\sum y}{N} = \frac{945}{7} = 135$$

$$b = \frac{\sum dxy}{\sum dx^2} = \frac{110}{28} = 3.93$$

$$y_c = a + b\,dx$$

1998 = 135 + 393(-3)

= 135 - 11.79 = 123.21

1999 = 135 + 3.93 (-2)

= 135 - 7.86 = 127.14

2000 = 135 + 3.93 (-1)

= 135 - 3.93 = 131.07

2001 = 135 + 3.93(0)=135.00

2002 = 135 + 3.93(1)

= 135 + 3.93 = 138.93

2003 = 135 + 3.93(2)

= 135 + 7.86 = 142.86

2004 = 135 + 3.93(3)

= 135 + 11.79 = 146.79

(2) వార్షిక పెరుగుదల రూ. 3.93 వేలు (రెండు y_cల మధ్య వ్యత్యాసము)

వార్షిక పెరుగుదల రూపాయలలో 3.93 × 1000 = 3930

1 నెలకు పెరుగుదల = $\frac{3930}{12} = 327.5$

(3) ప్రవృత్తి విలువల తొలగింపు :

సంకలన పద్ధతి (Additive Method) ($y - y_c$)

$\sum(y - y_c) = 0$ సున్నాతో సమానం అవుతుంది.

1998	=	120 - 123.21	=	- 3.21
1999	=	130 - 127.14	=	+ 2.86
2000	=	135 - 131.07	=	+ 3.93
2001	=	125 - 135.00	=	- 10.00
2002	=	145 - 138.93	=	+ 6.07
2003	=	150 - 142.86	=	+ 7.14
2004	=	140 - 146.79	=	- 6.79
		$\sum(y - y_c)$	=	0

గుణకార పద్ధతి (Multiplication Method**) :** $\frac{y}{y_c}$

$$\sum\left(\frac{y}{y_c}\right) = N$$

$$1998 = \frac{120}{123.21} = 0.97$$

$$1999 = \frac{130}{127.14} = 1.02$$

$$2000 = \frac{135}{131.07} = 1.03$$

$$2001 = \frac{125}{135} = 0.93$$

$$2002 = \frac{145}{138.93} = 1.04$$

$$2003 = \frac{150}{142.86} = 1.05$$

$$2004 = \frac{140}{146.79} = 0.95$$

$$\sum\left(\frac{y}{y_c}\right) = 7.00$$

3.7 ప్రశ్నలు :

1. ప్రవృత్తిని కొలిచే పద్ధతులు వివరించండి.
2. సరస వక్రరేఖా పద్ధతి గురించి వివరించండి.
3. అర్ధమాధ్యమాల పద్ధతిని చర్చించండి.
4. చలిత మాధ్యమాల పద్ధతి గురించి వివరించండి.
5. కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి గురించి వివరించండి.

3.8 అభ్యాసాలు :

1. క్రింది దత్తాంశం నుంచి సరస వక్రరేఖా పద్ధతి ద్వారా ప్రవృత్తి రేఖను చూపండి.

సం॥	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
ఉత్పత్తి	116	144	206	214	224	240	260	294

2. అర్ధమాధ్యమాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి రేఖను నిర్మించండి.

సం॥	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
అమ్మకాలు (లక్షల్లో)	5.0	5.7	6.1	5.8	6.2	6.5	7.2

3. క్రింది దత్తాంశం నుంచి అర్ధమాధ్యమాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి రేఖను నిర్మించండి.

సం॥	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
ఉత్పత్తి (కోట్లలో)	200	214	224	260	250	294	312	340

4. అర్ధమాధ్యమాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి రేఖను నిర్మించండి.

సం॥	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
ఉత్పత్తి	275	290	310	425	470	540	600	620

5. పాక్షిక సగటుల పద్ధతిలో క్రింది దత్తాంశానికి ప్రవృత్తి రేఖను నిర్మించండి.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003
అమ్మకాలు (వేలల్లో)	100	150	200	180	200	240

6. క్రింది దత్తాంశం నుంచి 2 సంవత్సరాల మరియు 3 సంవత్సరాల చలిత మాధ్యము లెక్కించండి.

సం॥	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
అమ్మకాలు (లక్షలలో)	115	119	125	135	160	179	216	233	275	333

7. దిగువ దత్తాంశము నుంచి 3 సం॥ల చలిత మాధ్యమం కనుగొనండి. స్వల్పకాలిక హెచ్చు తగ్గులు కూడా కనుగొనండి.

సం॥	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
ధర	16	19	21	22	23	25	24	22	26	26	27	26

8. 3 సం॥ల చలిత మాధ్యమం, స్వల్పకాలిక హెచ్చుతగ్గులు కనుగొనండి.

సం॥	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
అమ్మకాలు	76	80	85	91	113	125	112	121	133	155	140	167

9. 3 సంవత్సరాల మరియు 5 సంవత్సరాల చలిత మాధ్యమం కనుగొనండి.

సం॥	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
ధరలు	112	115	120	118	121	120	124	126	130	128	131	136

10. 3 మరియు 4 సంవత్సరాల చలిత మాధ్యమాలు కనుగొనండి. 4 సం॥ల చలిత మాధ్యమానికి కేంద్రీకృత సగటును కనుగొనండి.

సం॥	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
అమ్మకాలు	32	38	42	44	46	60	48	44	53	62	54	62

11. 4 సంవత్సరాల చలిత మాధ్యమాన్ని కేంద్రీకృత సగటును కనుగొనండి.

సం॥	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
ధర	73	74	72	78	81	84	80	87	90	103	113	117

12. క్రింది దత్తాంశం నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి విలువను కనుగొని, 2006వ సం॥కి లాభం అంచనా వేయండి.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
లాభాలు (లక్షలలో)	60	72	75	65	80	85	95

13. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. 2008కి అమ్మకాలు అంచనా వేయండి.

సం॥	2000	2001	2002	2003	2004
అమ్మకాలు (కోట్లలో)	12	18	20	23	27

14. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. 2005వ సం॥కి లాభం అంచనా వేయండి.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
లాభాలు	120	144	150	130	160	170	190

15. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి విలువను కనుగొని 2008వ సంవత్సరానికి, 1996కు విలువ అంచనా వేయండి.

సం॥	2000	2001	2002	2003	2004
విలువ	38	38	46	40	56

16. క్రింది వివరాల నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి విలువను కనుగొనండి.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
విలువ	100	120	110	140	80	95	115

2007కు విలువ అంచనా వేయండి.

17. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొని, 2004కు, 1990కి ధరలు అంచనా వేయండి.

సం॥	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
ధరలు	38	40	65	72	69	60	87	95

18. క్రింది వివరాల నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి.

సం॥	1998	1999	2000	2001	2002	2003
విలువలు	27	30	35	40	44	45

2005వ సంవత్సరపు విలువలు అంచనా వేయండి.

19. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి.

సం॥	1966	1968	1969	1970	1971	1972	1975
ఉత్పత్తి	77	88	94	85	91	98	90

1974వ సంవత్సరపు విలువ అంచనా వేయండి.

20. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. 2003కు ధర అంచనా వేయండి.

సం॥	1990	1992	1995	1996	1997	1999	2000
ధర	25	32	40	37	44	50	57

21. క్రింది దత్తాంశము నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. 1992కు జనాభా అంచనా వేయండి.

సం॥	1980	1981	1984	1985	1987	1988	1989
జనాభా	2.5	2.9	3.2	3.0	4.7	5.4	6.3

22. క్రింది దత్తాంశం నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనుగొనండి. నెలసరి ఉత్పత్తి పెరుగుదలను కనుగొనండి. సంకలన మరియు గుణకార పద్ధతులలో ప్రవృత్తి విలువలు తొలగించండి.

సం॥	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
ఉత్పత్తి ('000' టన్నులలో)	360	390	405	375	435	450	420

23. క్రింది దత్తాంశం నుంచి సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో కనుగొనండి.

సం॥	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
విలువలు	380	400	650	720	690	620	670	950	1040

సంకలన మరియు గుణకార పద్ధతులలో ప్రవృత్తి విలువలు తొలగించండి.

24. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా ప్రవృత్తి విలువను కనుగొని $\sum(y-y_c)=0$ అని ఋజువు చేయండి.

సం॥	2000	2001	2002	2003
అమ్మకాలు ('000')	10	13	15	12

25. క్రింది దత్తాంశం నుంచి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళ రేఖా ప్రవృత్తిని, విలువను కనుగొనండి. ప్రవృత్తి విలువను పట్టీలో చూపండి. ఆ విలువలను రేఖాచిత్రంలో చూపండి.

చక్కెర కంపెనీ ఉత్పత్తి వివరాలు :

సం॥	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
ఉత్పత్తి ('000' టన్నులలో)	80	90	92	83	94	99	92

1989కి ఉత్పత్తిని అంచనా వేయండి. ఉత్పత్తి యొక్క నెలసరి పెరుగుదల ఎంత ?

రచయిత

శ్రీ టి. నాగేశ్వరరావు

పాఠం 4

కాలశ్రేణులు

ఋతుసంబంధ విచరణాలు – ఋతు ప్రభావాలను తొలగించడం

(Seasonal Variations - Deseasonalisation)

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యంశం అధ్యయనం చేయడం వలన మీరు :-

* ఋతు సంబంధ విచరణాలు గురించి, వాటిని కొలిచే వివిధ పద్ధతులను గురించి, వివరంగా తెలుసుకొనగలరు.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

విషయ పరిచయం :

ఋతు సంబంధ విచరణాలకు సంబంధించిన విషయాలు, పరిజ్ఞానం, గణాంక వేత్తకు ఎంతో అవసరం. కొనుగోళ్ళు, అమ్మకాలు, మెటీరియల్ నియంత్రణ, కార్మికుల హాజరు మొదలైన విషయాలకు సంబంధించిన చాలా వరకు వ్యాపారపు నిర్ణయాలు ఋతుసంబంధ విచరణకు ప్రభావితమౌతాయి. అనగా వీటికి సంబంధించిన విధాన నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి ఋతు సంబంధ పరిజ్ఞానం చాలా అవసరం.

ఋతు సంబంధ విచరణను కొలవడానికి రెండు ప్రధాన కారణాలున్నాయి.

1. కాలశ్రేణులలో ఋతుపవన మార్పుల ప్రభావంను తెలుసుకోవడం.

2. కాలశ్రేణులలో ఋతు పవన మార్పులను తొలగించడం, తద్వారా దీర్ఘకాలమునకు సంబంధించిన అంశాలను, ఋతుపవన రహితమైన పరిణామాలు అంచనా వేయడం.

4.2 ఋతు సంబంధ లేదా ఋతుపవన సూచీలు : ఋతు పవన విచలనాల కొలమానాలను ఋతు సంబంధ సూచీలు అంటారు. వీటిని పరమ విలువల (Absolute Values) రూపంలోగాని, సాపేక్ష విలువల రూపంలోగాని (Relative Values) చెప్పవచ్చు. పరమ విలువల రూపంలో అయితే సంకలన పద్ధతిలో (కూడిక) (Additive Model) అనగా $S = Y(T + C + I)$ అని చెబుతారు. ఇక్కడ

S అనగా ఋతు సంబంధ లేదా ఋతుపవన విచలనాలు అని అర్థం

Y అనగా చలరాశి విలువ అని అర్థం

T అనగా ప్రవృత్తి విలువ అని అర్థం

C అనగా చక్రీయ మార్పులు అని అర్థం

I అనగా క్రమరహిత మార్పులు అని అర్థం

సాపేక్ష విలువల రూపంలో అయితే ఋతుపవన సూచీలను గుణకార పద్ధతిలో (Multiplicative Model) మిగిలిన అంశాల శాతాలుగా చెప్పవచ్చు. అనగా $S = \frac{TSCI}{TCI} \times 100$ లేదా $\frac{Y}{TCI}$.

4.3 ఋతు సంబంధ విచరణాలను కొలిచే పద్ధతులు :

ఋతు సంబంధ విచరణాలను కొలవడానికి అనేక పద్ధతులున్నాయి. అందులో ముఖ్యమైనవి ఇవి :

(ఏ) సామాన్య సగటు పద్ధతి (Simple average method)

(బి) ప్రవృత్తి - నిష్పత్తి పద్ధతి (Method of Ratio to Trend)

(సి) చలిత మాధ్యమాల - నిష్పత్తి పద్ధతి (Method of Ratio to Moving Average)

(డి) లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి (Method of Link Relatives)

4.4 సామాన్య సగటు పద్ధతి (Method of Simple Average) :

ఋతుసంబంధ విచరణాలను కొలిచే పద్ధతులలో ఇది చాలా తేలికైనది. ఈ పద్ధతిలో ఒక ఋతువునకు సంబంధించిన సూచీని ఈ విధంగా లెక్కిస్తారు.

$$\text{ఋతుపవన సూచీ} = \frac{\text{ఒక ఋతువు యొక్క సగటు}}{\text{వార్షిక సగటు}}$$

ఇక్కడ ఒక ఋతువు అనగా - ఒక నిర్దిష్ట కాలానికి అనగా నెల, త్రైమాసికం, వారం, రోజు, ఏదైనా కావచ్చును. - అలాంటి నిర్దిష్ట కాలపు సగటును ఋతువు యొక్క సగటు అంటారు.

వార్షికం అనగా సంవత్సరం. సంవత్సరంలో అన్ని ఋతువుల (అనగా 4 త్రైమాసికాల లేదా 12 నెలల లేదా 52 వారాల లేదా 365 రోజుల) సగటు యొక్క సగటును వార్షిక సగటు అంటారు.

ఉదా : - క్రింది దత్తాంశం నుంచి ఋతు సంబంధమైన సూచీని కనుగొనండి.

ఒక కంపెనీలో ఉత్పత్తి మిలియన్ టన్నులలో ఇలా వుంది.

సం॥	1999	2000	2001	2002	2003
I త్రైమాసికం	72	76	74	76	78
II త్రైమాసికం	68	70	66	74	74
III త్రైమాసికం	80	82	84	84	86
IV త్రైమాసికం	70	74	80	78	82

జవాబు :

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
1999	72	68	80	70
2000	76	70	82	74
2001	74	66	84	80
2002	76	74	84	78
2003	78	74	86	82
	-------	-------	-------	-------
	376	352	416	384
	-------	-------	-------	-------
క్వార్టర్ సగటు	$\frac{376}{5}$	$\frac{352}{5}$	$\frac{416}{5}$	$\frac{384}{5}$
(ఋతువు సగటు)	75.2	70.4	83.2	76.8

వార్షిక సగటు = $\frac{75.2+70.4+83.2+76.8}{4}$

$$=\frac{305.6}{4} \quad =76.4$$

$$\text{ఋతు సంబంధమైన సూచీ} = \frac{\text{ఋతువు యొక్క సగటు}}{\text{వార్షిక సగటు}} \times 100$$

$$\text{I క్వార్టర్ (త్రైమాసికం)} = \frac{75.2}{76.4}\times 100 = 98.43\%$$

$$\text{II క్వార్టర్ (త్రైమాసికం)} = \frac{70.4}{76.4}\times 100 = 92.15\%$$

$$\text{III క్వార్టర్ (త్రైమాసికం)} = \frac{83.2}{76.4}\times 100 = 108.9\%$$

$$\text{IV క్వార్టర్ (త్రైమాసికం)} = \frac{76.8}{76.4}\times 100 = 100.52\%$$

ఉదా : 2 : ఈ క్రింది వివరాలకు సామాన్య సగటు పద్ధతి ద్వారా ఋతు సంబంధ సూచీ కనుగొనండి.

నెల సం॥	జనవరి	ఫిబ్రవరి	మార్చి	ఏప్రిల్	మే	జూన్	జులై	ఆగస్టు	సెప్టెంబర్	అక్టోబర్	నవంబర్	డిసెంబర్
2001	45	48	54	54	69	69	60	84	87	99	99	114
2002	69	66	84	81	93	84	66	84	96	111	102	132
2003	75	75	105	108	108	90	90	102	114	141	123	159

జవాబు :

నెల సం॥	జనవరి	ఫిబ్రవరి	మార్చి	ఏప్రిల్	మే	జూన్	జులై	ఆగస్టు	సెప్టెంబర్	అక్టోబర్	నవంబర్	డిసెంబర్
2001	45	48	54	54	69	69	60	84	87	99	99	114
2002	69	66	84	81	93	84	66	84	96	111	102	132
2003	75	75	105	108	108	90	90	102	114	141	123	159
మొత్తం	189	189	243	243	270	243	216	270	297	351	324	405
నెలసగటు	$\frac{189}{3}$	$\frac{189}{3}$	$\frac{243}{3}$	$\frac{243}{3}$	$\frac{270}{3}$	$\frac{243}{3}$	$\frac{216}{3}$	$\frac{270}{3}$	$\frac{297}{3}$	$\frac{351}{3}$	$\frac{324}{3}$	$\frac{405}{3}$
	63	63	81	81	90	81	72	90	99	117	108	135

వార్షిక సగటు = $\dfrac{63+63+81+81+90+81+72+90+99+117+108+135}{12}$

$=\dfrac{1080}{12} = 90$

ఋతుసంబంధ సగటు = $\dfrac{\text{నెలవారీ సగటు}}{\text{వార్షిక సగటు}} \times 100$

జనవరి = $\dfrac{63}{90}\times 100 = 70$ ఏప్రిల్ = $\dfrac{81}{90}\times 100 = 90$ జులై = $\dfrac{72}{90}\times 100 = 80$

ఫిబ్రవరి = $\dfrac{63}{90}\times 100 = 70$ మే = $\dfrac{90}{90}\times 100 = 100$ ఆగస్టు = $\dfrac{90}{90}\times 100 = 100$

మార్చి = $\dfrac{81}{90}\times 100 = 90$ జూన్ = $\dfrac{81}{90}\times 100 = 90$ సెప్టెంబర్ = $\dfrac{99}{90}\times 100 = 110$

అక్టోబర్ = $\dfrac{117}{90}\times 100 = 130$ నవంబర్ = $\dfrac{108}{90}\times 100 = 120$ డిసెంబర్ = $\dfrac{135}{90}\times 100 = 150$

ఉదా : తపాలా పెట్టెలో 4 వారాలలో పోస్ట్ చేయబడిన ఉత్తరాల సంఖ్య ఆధారంగా ఋతు సంబంధ సూచీని కనుగొనండి.

రోజులు	సోమ	మంగళ	బుధ	గురు	శుక్ర	శని
I వారం	86	150	175	160	150	192
II వారం	90	162	164	135	175	175
III వారం	94	148	154	139	167	185
IV వారం	70	140	185	154	168	178

జవాబు :

I వారం	86	150	175	160	150	192
II వారం	90	162	164	135	175	175
III వారం	94	148	154	139	167	185
IV వారం	70	140	185	154	168	178
	------	------	------	------	------	------
	340	600	678	588	660	730
	------	------	------	------	------	------

ఒక్క రోజు సగటు	$\frac{340}{4}$	$\frac{600}{4}$	$\frac{678}{4}$	$\frac{588}{4}$	$\frac{660}{4}$	$\frac{730}{4}$
	85	**150**	**169.5**	**147**	**165**	**182.5**

$$\text{వారపు సూచీ} = \frac{85+150+169.5+147+165+182.5}{6}$$

$$=\frac{899.0}{6} \quad =149.83$$

$$\text{ఋతు సంబంధమైన సూచీ} = \frac{\text{రోజు వారీ సగటు}}{\text{వారపు సగటు}} \times 100$$

సోమవారపు సూచీ = $\frac{85}{149.83}\times 100 = 56.73$

మంగళవారపు సూచీ = $\frac{150}{149.83}\times 100 = 100.11$

బుధవారపు సూచీ = $\frac{169.5}{149.83}\times 100 = 113.13$

గురువారపు సూచీ = $\frac{147}{149.83}\times 100 = 98.11$

శుక్రవారపు సూచీ = $\frac{165}{149.83}\times 100 = 110.12$

శనివారపు సూచీ = $\frac{182.5}{149.83}\times 100 = 121.80$

4.5 ప్రవృత్తి - నిష్పత్తి పద్ధతి (Method of Ratio to Trend) :

ఇది సామాన్య సగటు పద్ధతి కంటే మెరుగైనది. కాలశ్రేణుల విశ్లేషణలో గుణకార నమూనా పద్ధతిని ఆధారంగా చేసుకొని ఋతుపవనాల మార్పులను నిర్ణయిస్తారు. ఈ పద్ధతి ఏ కాలానికి అయిననూ (అనగా నెల, త్రైమాసికం మొదలైనవి) ఋతు సంబంధ మార్పులు ఇచ్చిన విలువలు, ప్రవృత్తి విలువల నిష్పత్తిపై ఆధారపడి ఉంటాయని భావించబడుతుంది. నిష్పత్తులను లెక్కించడం ద్వారా కాలశ్రేణులు దత్తాంశం నుంచి ప్రవృత్తిని తొలగించవచ్చు.

కాబట్టి $\frac{T\times S\times C\times I}{T} = S\times C\times I$

ఋతు సంబంధ సూచీలను లెక్కించే విధానం ఇలా వుంటుంది

1) కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి విలువలు లెక్కించవలె.

2) దత్తాంశంలో ఇచ్చిన విలువలను ప్రవృత్తి విలువలతో భాగించి 100చే హెచ్చించవలె. అనగా శాతాలు లెక్కించవలె.

3) లెక్కించిన శాతాలకు సగటును లెక్కించవలె. ఇక్కడ సగటు అనగా అంకమధ్యమం కావచ్చును లేదా మధ్యగతం కావచ్చును. సగటు లెక్కించడం వలన చక్రీయ యాదృచ్ఛిక మార్పుల ప్రభావం పోతుంది.

4) ఈ విధంగా లెక్కించిన సూచీలను 1200 చేత (దత్తాంశం నెలవారీగా ఇస్తే) లేదా 400 చేత (దత్తాంశం క్వార్టర్ వారీగా ఇస్తే) సమానీకృతం చేయవలె. సమానీకృతం చేయడాన్ని 'K' కారకం అంటారు.

$$K = \frac{1200 \text{ లేదా } 400}{\text{సూచీల మొత్తం}}$$

ఉదా : 4 : ఒక కంపెనీలో ఉత్పత్తి ఇలా వుంది. ఋతు సంబంధ మార్పులను ప్రవృత్తి నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా లెక్కించండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్	వార్షిక ఉత్పత్తి
1999	120	150	138	132	540
2000	132	186	180	162	660
2001	150	204	192	174	720
2002	192	258	234	216	900
2003	270	306	288	276	1140

జవాబు : కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి ద్వారా ప్రవృత్తి విలువలు తెలియజేయుట.

సం॥ x	వార్షిక ఉత్పత్తి y	క్వార్టర్ సగటు ఉత్పత్తి (y)	dx	dx^2	dxy	Y_c
1999	540	135	-2	4	-270	126
2000	660	165	-1	1	-165	162
2001	720	180	0	0	0	198
2002	900	225	+1	1	225	234
2003	1140	285	+2	4	570	270
N=5		$\sum y=990$	0	10	360	

$$a = \frac{\sum y}{N} = \frac{990}{5} = 198$$

$$b = \frac{\sum dxy}{\sum dx^2} = \frac{360}{10} = 36$$

$$Y_c = a + b\,dx$$

1999 = 198 + 36 (-2)

= 198 - 72 = 126

2000 = 198 + 36 (-1)

= 198 - 36 = 162

2001 = 198 + 36 (0) = 198

2001 = 198 + 36(1)

= 198 + 36 = 234

2002 = 198 + 36(2)

= 198 + 72 = 270

ఇందులో వార్షిక పెరుగుదల 36. అనగా క్వార్టర్‌కు పెరుగుదల $9\left(\frac{36}{4}\right)$. దీని ఆధారంగా క్వార్టర్ ప్రవృత్తి విలువల లెక్కింపు ఇలా ఉంటుంది.

1999 యొక్క ప్రవృత్తి విలువ 126. దీనిని రెండవ క్వార్టర్‌కు మూడవ క్వార్టర్‌కు మధ్యగా చూపవలె. అనగా రెండవ క్వార్టర్‌లో సగం 3వ క్వార్టర్‌లో సగంగా తీసుకొనవలె. క్వార్టర్ పెరుగుదల రేటు 9 కాబట్టి 1999లో 2వ క్వార్టర్‌కు మూడవ క్వార్టర్‌కు ప్రవృత్తి విలువలు 121.5 (126 - 4.5); 130.5 (126 + 4.5) అవుతాయి. ఒకటవ క్వార్టర్ ప్రవృత్తి విలువ 112.5 (121.5 - 9), నాల్గవ క్వార్టర్ ప్రవృత్తి విలువ 139.5(130.5 + 9) అవుతుంది. ఈ విధంగా మిగిలిన సంవత్సరాల క్వార్టర్‌లకు ప్రవృత్తి విలువలు లెక్కించవలె.

క్వార్టర్ ప్రవృత్తి విలువలు

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్	మొత్తం
1999	112.5	121.5	130.5	139.5	504
2000	148.5	157.5	166.5	175.5	648
2001	184.5	193.5	202.5	211.5	792
2002	220.5	229.5	238.5	247.5	936
2003	256.5	265.5	274.5	283.5	1080

ప్రవృత్తి శాతాలు లెక్కించడం = $y = \dfrac{\text{ఇచ్చిన విలువ}}{\text{ప్రవృత్తి విలువ}} \times 100$

1999 - I $\dfrac{120}{112.5} \times 100 = 106.67$

II $\dfrac{150}{121.5} \times 100 = 123.46$

III $\dfrac{138}{130.5} \times 100 = 105.75$

IV $\dfrac{132}{139.5} \times 100 = 94.62$

2000 I $\dfrac{132}{148.5} \times 100 = 106.67$

II $\dfrac{186}{157.5} \times 100 = 118.10$

III $\dfrac{180}{166.5} \times 100 = 108.11$

IV $\dfrac{162}{175.5} \times 100 = 92.31$

2001- I $\dfrac{150}{184.5} \times 100 = 81.30$

II $\dfrac{204}{193.5} \times 100 = 105.43$

III $\dfrac{192}{202.5} \times 100 = 94.81$

IV $\dfrac{174}{211.5} \times 100 = 82.27$

2002 I $\dfrac{192}{220.5} \times 100 = 87.07$

II $\dfrac{258}{229.5} \times 100 = 112.42$

III $\dfrac{234}{238.5} \times 100 = 98.11$

IV $\dfrac{216}{247.5} \times 100 = 87.27$

2003 I $\dfrac{270}{256.5} \times 100 = 105.26$

II $\dfrac{306}{265.5} \times 100 = 115.25$

III $\dfrac{288}{274.5} \times 100 = 104.92$

IV $\dfrac{276}{283.5} \times 100 = 97.35$

ప్రవృత్తి తొలిగించబడిన తరువాత విలువలు

(ప్రవృత్తి విలువ శాతంగా)

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
1999	106.67	123.46	105.75	94.62
2000	88.89	118.10	108.11	92.31
2001	81.30	105.43	94.81	82.27
2002	87.07	112.42	98.11	87.27
2003	105.26	115.25	104.92	97.35
మొత్తము	469.19	574.66	511.70	453.82

సగటు	$\frac{469.19}{5}$	$\frac{574.66}{5}$	$\frac{511.70}{5}$	$\frac{453.82}{5}$
	= 93.84	**= 114.93**	**= 102.34**	**= 90.76 = మొత్తము 401.87**
సర్దుబాటు చేసిన సూచిక	**93.40**	**114.40**	**102.86**	**90.34**

$$\left(\frac{400}{401.87}\times 93.84\right) \quad \left(\frac{400}{401.87}\times 114.93\right)\left(\frac{400}{401.87}\times 102.34\right)\left(\frac{400}{401.87}\times 90.76\right)$$

సగటు సూచికల మొత్తం **401.87**. ఇది **400** కంటే ఎక్కువ కాబట్టీ ఋతు సగటు సూచీలకు సర్దుబాటు చేయవలె.

సర్దుబాటు చేయవలసిన విలువ (K) = $\frac{400}{\text{సూచికల మొత్తం}}$ × సగటు సూచీల విలువ

4.6 చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతి : -

ప్రవృత్తి, నిష్పత్తి పద్ధతిలో ప్రవృత్తి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో లెక్కించబడుతుంది. ఇందులో ప్రవృత్తి చలిత మాధ్యమాల పద్ధతిలో లెక్కించబడుతుంది. ఈ పద్ధతి ద్వారా దత్తాంశంలోని ప్రవృత్తి, చక్రీయ అంశాలను ఈ క్రింది రెండు నమూనాల ద్వారా తొలగించవచ్చును.

1. గుణకార నమూనా = $SI = \frac{TSCI}{TC} \times 100$

2. కూడికల నమూనా = $S + I = (T + S + C + I) - (T + C)$

1. గుణకార నమూనా క్రింది విధంగా ఉంటుంది :-

(ఎ) 12 నెలల లేదా 4 క్వార్టర్ల చలిత మాధ్యమాలను కనుగొనవలె. ఈ చలిత మాధ్యమాలు ప్రవృత్తి చక్రీయ మార్పుల మొత్తాన్ని తెలియజేస్తాయి.

(బి) ఇచ్చిన విలువకు చలిత మాధ్యమాల విలువకు నిష్పత్తిని కనుగొని, వాటిని శాతాలుగా మార్చవలె. ఈ శాతాలు ఋతుసంబంధ ప్రభావాన్ని నిరూపిస్తాయి.

$$SI = \frac{\text{ఇచ్చిన విలువ}}{\text{చలిత మాధ్యమాల విలువ}} \times 100$$

(సి) ఈ విధంగా లెక్కించిన శాతాల సగటు లెక్కించి, యాదృచ్ఛిక మార్పుల ప్రభావాన్ని తొలగించవలె. తద్వారా ఋతుసంబంధ మార్పుల ప్రాథమిక సూచికలను నిర్ణయించవచ్చును.

(డి) ఋతు సంబంధ మార్పుల ప్రాథమిక సూచికల మొత్తం, సాధారణంగా, 1200కు సమానంగా ఉండదు. అందువలన సర్దుబాటు 'K' కారకంను ఉపయోగించి తుది ఋతుసంబంధ సూచీలను లెక్కించవలె.

$$K = \frac{1200 \text{ (త్రైమాసిక దత్తాంశంలో 400)}}{\text{ప్రాథమిక ఋతుసంబంధ సూచీల మొత్తం}}$$

ఉదా : 5 క్రింది వివరాలకు చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా గుణకార నమూనాలో ఋతుపవన సూచీని లెక్కించండి.

'A' అనే వస్తువు ధర రూపాయలలో

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
2001	6	9	6	12
2002	15	21	18	24
2003	18	27	24	30

జవాబు :

చలిత మాధ్యమాలు, ప్రవృత్తి శాతాలు లెక్కించడం.

సం॥	క్వార్టర్	ధర రూ॥	4 క్వార్టర్ల మొత్తం	రెండు 4 క్వార్టర్ల చలిత మొత్తాలు	4 క్వార్టర్ల చలిత మాధ్యమాలు 5వ వరుస ÷ 8	ప్రవృత్తి శాతాలు $\frac{\text{ధర}}{\text{చలిత మాధ్యమం}} \times 100$
1	2	3	4	5	6	7
2001	I	6	-	-	-	-
	II	9	-	-	-	-
	III	6	33	75	9	6 ÷ 9 × 100 = 67
	IV	12	42	96	12	12 ÷ 12 × 100 = 100
2002	I	15	54	120	15	15 ÷ 15 × 100 = 100
	II	21	66	144	18	21 ÷ 18 × 100 = 117
	III	18	78	159	19.5	18 ÷ 19.5 × 100 = 92
	IV	24	81	168	21	24 ÷ 21 × 100 = 114
2003	I	18	87	180	22.5	18 ÷ 22.5 × 100 = 80
	II	27	93	192	24	27 ÷ 24 × 100 = 113
	III	24	99	-	-	-
	IV	30	-	-	-	-

ఋతు సంబంధ సూచీలు లెక్కించడం

క్వార్టర్ ప్రవృత్తి శాతాలు

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్	మొత్తం
2001	-	-	67	100	167
2002	100	117	92	114	423
2003	80	113	-	-	193
క్వార్టర్ మొత్తం	180	230	159	214	783
క్వార్టర్ ప్రాథమిక సూచీలు	$180 \div 2=90$	$230 \div 2=115$	$159 \div 2=79.5$	$214 \div 2=107$	$783 \div 2 = 391.5$
సవరించబడిన సూచీలు	$\frac{90\times400}{391.5}=91.5$	$\frac{115\times400}{391.5}=117.5$	$\frac{79.5\times400}{391.5}=81.23$	$\frac{107\times400}{391.5}=109.32$	400

(2) కూడికల నమూనా ఈ క్రింది విధంగా వుంటుంది.

(ఎ) 12 నెలల లేక 4 క్వార్టర్ల చలిత మాధ్యమాలను 3 లెక్కించవలె.

(బి) ఇచ్చిన విలువల నుంచి చలిత మాధ్యమం ప్రవృత్తి విలువను తీసివేసి ఋతుపవన ప్రభావాలను లెక్కించవలె. సూత్రం $S+I=(T+S+C+I)-(T+C)$ అనగా ప్రవృత్తి తొలగించబడిన విలువలు కనుగొనవలె.

(సి) ఋతు సంబంధ మార్పుల ప్రాథమిక సూచీలను లెక్కించవలె.

(డి) ఋతు సంబంధ మార్పుల ప్రాథమిక సూచీల మొత్తం 1200 లేదా 400కు సమానంగా ఉన్నట్లయితే సర్దుబాటు 'K' కారకంను ఉపయోగించి తుది ఋతుసంబంధ సూచీ లెక్కించవలె.

ఉదాహరణ : క్రింది దత్తాంశానికి చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా కూడికల నమూనాలో ఋతుసంబంధ సూచీని గణన చేయండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
2001	6	9	6	12
2002	15	21	18	24
2003	18	27	24	30

జవాబు : చలిత మాధ్యమాల గణన మరియు ప్రవృత్తి తొలగింపు ద్వారా వచ్చిన విలువలు

సం॥	క్వార్టర్లు	ధర రూ॥	క్వార్టర్ల మొత్తం	కేంద్రీకృతం చేయబడిన రెండు మొత్తాలు	ప్రాథమిక క్వార్టర్ల చలిత మాధ్యమాలు	ధర - చలిత మాధ్యమాలు
2001	I	6	-	-	-	-
	II	9	33	-	-	-
	III	6	42	75	9.0	6 - 9 = -3
	IV	12	54	96	12.0	12 - 12 = 0
2002	I	15	66	120	15.0	15 - 15 = 0
	II	21	78	144	18.0	21 - 18 = 3
	III	18	81	159	19.5	18 - 19.5 = -1.5
	IV	24	87	168	21	24 - 21 = 3
2003	I	18	93	180	22.5	18 - 22.5 = -4.5
	II	27	99	192	24.0	27 - 24 = 3
	III	24	-	-	-	-
	IV	30	-	-	-	-

ఋతుసంబంధ సూచీల గణన

ప్రవృత్తి తొలగించబడిన విలువలు

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్	మొత్తం
2001	-	-	-1.0	0	-1.0
2002	0	1.0	-0.5	1.0	1.5
2003	-1.5	1.0	-	-	-0.5
క్వార్టర్ మొత్తాలు	-1.5	2.0	-1.5	1.0	0
క్వార్టర్ సగటు	-0.75	1.0	-0.75	0.5	0

క్వార్టర్ సగటుల మొత్తం 'సున్నా' కాబట్టి సర్దుబాటు కారకంను ఉపయోగించనక్కరలేదు. కాబట్టి ప్రాథమిక క్వార్టర్ చలిత మాధ్యమాల విలువలను తుది ఋతుసంబంధ సూచీలుగా తీసుకోవచ్చు.

4.7 లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి :

లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి ద్వారా ఋతు సంబంధ సూచీలను లెక్కించడాన్ని కార్ల్‌పియర్సన్ రూపొందించినారు. అందుచేత దీనిని పియర్సన్ ఋతుసంబంధ సూచి పద్ధతి అని కూడా అంటారు. ఈ పద్ధతి ఇలా వుంటుంది.

(1) దత్తాంశానికి క్రింది సూత్రం ద్వారా సాపేక్షాలను లెక్కించవలె.

$$\text{లింక్ సాపేక్షాల విలువ} = \frac{\text{ప్రస్తుతం ఇచ్చిన విలువ}}{\text{గతకాలపు ఇచ్చిన విలువ}} \times 100$$

(2) లింక్ సాపేక్ష విలువలను ఋతుకాలానుగతంగా ఏర్పరచి వాటి సగటు విలువలను అంకమధ్యమం లేదా మధ్యగతం ద్వారా లెక్కించవలె.

(3) లెక్కించిన ప్రతి సగటు లింక్‌సాపేక్ష విలువలకు, గొలుసు సాపేక్ష విలువలను క్రింది సూత్రం ద్వారా లెక్కించవలె.

$$\text{గొలుసు సాపేక్ష విలువ} = \frac{\text{లింక్ సాపేక్ష విలువ} \times \text{గతకాలపు గొలుసు సాపేక్ష విలువ}}{100}$$

(4) సర్దుబాటు చేయడానికి ప్రతి గొలుసు సాపేక్ష విలువ నుంచి పరిష్కార కారకాలను తీసివేయవలె. అందుకుగాను క్రింది సూత్రాన్ని ప్రయోగించవలె.

ప్రాథమిక రెండు ఋతుకాలాలకు సంబంధించిన లింక్ సాపేక్షాల వ్యత్యాసం =

$$\frac{\text{ప్రాథమిక ఋతుకాలానికి సంబంధించి సవరించిన లింక్ సాపేక్షాల విలువ} - \text{ప్రాథమిక ఋతుకాలానికి సంబంధించిన ప్రాథమిక లింక్ సాపేక్షాల విలువ}}{\text{సంవత్సరంలోని ఋతుకాలం (12 నెలలు లేదా 4 క్వార్టర్లు)}}$$

(5) గొలుసు సూచీల నుంచి పరిష్కార కారకంను తీసివేసి ప్రాథమిక ఋతుపవన సూచీని లెక్కించవలె.

(6) ప్రాథమిక సూచీలను వాటి సగటుల శాతాలుగా లెక్కిస్తూ తుది ఋతుసంబంధ సూచీలను లెక్కించవలె.

ఉదా : 7 క్రింది దత్తాంశం తేయాకు ఎగుమతికి సంబంధించినది. లింక్‌సాపేక్షాల పద్ధతిని ఉపయోగిస్తూ ఋతు సంబంధ సూచీని లెక్కించండి.

భారతదేశం నుంచి తేయాకు ఎగుమతులు రూ. కోట్లలో

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
2000	1415	1290	1220	1300
2001	1050	1040	1020	1205
2002	970	840	795	915
2003	795	810	840	945

జవాబు : లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి ద్వారా ఋతు సంబంధ సూచీల గణన

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్	
2000	-	91.17	94.57	106.56	$\frac{1290}{1415}\times 100 = 91.17$
2001	80.76	99.05	98.07	118.14	$\frac{1220}{1290}\times 100 = 94.57$
2002	80.99	86.59	94.64	115.09	
2003	86.88	101.88	103.70	112.50	
మొత్తం	248.13	378.69	390.98	452.29	
అంక మధ్యమం	82.71	94.67	97.75	113.07	
గొలుసు సాపేక్షాలు	100	$\frac{94.67\times 100}{100}=96.67$	$\frac{97.75\times 94.67}{100}=92.54$	$\frac{113.07\times 92.54}{100}=104.64$	
సర్దుబాటు చేసిన గొలుసు సాపేక్షాలు	100	98.03*	95.9*	108*	$= \frac{401.93}{4}=100.48$
ఋతుసంబంధ సూచీలు	$\frac{100}{100.48}\times 100$	$\frac{98.03}{100.48}\times 100$	$\frac{95.9}{100.48}\times 100$	$\frac{108}{100.48}\times 100$	
$\frac{\text{సవరించిన గొ.సా.}}{\text{స.గొ.సా. సగటు}}\times 100$	= 99.52	= 97.56	= 95.44	= 107.48	

* క్వార్టర్ ఒకటికి వ్యత్యాసం : -

4వ క్వార్టర్ ఆధారంగా 1వ క్వార్టర్ గొలుసు సాపేక్ష విలువలు లెక్కించడం =

$$\frac{\text{మొదటి క్వార్టర్ లింక్ సాపేక్ష విలువ} \times \text{4వ క్వార్టర్ యొక్క గొలుసు సాపేక్ష విలువ}}{100}$$

$$= \frac{82.71\times 104.64}{100} = 86.55$$

I క్వార్టర్ ప్రస్తుత గొలుసు సాపేక్ష విలువ, గతంలో లెక్కించిన గొలుసు సాపేక్ష విలువల మధ్య గల వ్యత్యాసం =

86.55 - 100 = - 13.45

క్వార్టర్ 1కి వ్యత్యాసం = $\frac{-13.45}{4} = -3.36$

సర్దుబాటు చేసిన గొలుసు సాపేక్షకాలు :

I క్వార్టర్	=	100
II క్వార్టర్	=	98.03 (94.67 - (-3.36))
III క్వార్టర్	=	95.9 (92.54 - (-3.36))
IV క్వార్టర్	=	108.0 (104.64 - (-3.36))

4.8 ఋతు ప్రభావాలను తొలగించడం (Deseasonalisation) :

కాలశ్రేణుల ప్రస్తుత విలువల నుంచి ఋతు సంబంధ మార్పులను తొలిగించే ప్రక్రియనే "ఋతు ప్రభావాలను తొలగించడం" అంటారు. కాల శ్రేణుల నుంచి ప్రవృత్తిని తొలిగించిన తరువాత ఋతు సంబంధ మార్పులను తొలిగించడానికి ఈ ప్రక్రియను చేపడతారు. దీని వలన చక్రీయ మార్పులను, క్రమరహిత మార్పులను అధ్యయనం చేయడానికి వీలవుతుంది. ఋతు ప్రభావాలను తొలగించడం అనే చర్య వలన కాలశ్రేణుల విఘటనంనకు (Decomposition of time series) దోహదపడుతుంది. దీని వలన కాలశ్రేణులను వివిధ అంశాలుగా అనగా ప్రవృత్తి, ఋతుసంబంధ మార్పులు, చక్రీయ, క్రమరహిత మార్పులుగా వర్గీకరించవచ్చును. ఉత్పత్తి, మార్కెటింగ్ కార్యకలాపాలను ప్రణాళికీకరణ చేయడానికి వ్యాపార వేత్తలకు, నిర్వహణాధికారులకు ఋతుభారాల తొలగింపు ఎంతగానో ఉపయోగపడుతుంది. కాలశ్రేణులు ఇచ్చిన విలువలను వివరించడానికి కూడా ఋతు ప్రభావాల తొలగింపు దోహదకారిగా వుంటుంది.

ఋతు ప్రభావాల తొలగింపు విధాన క్రమం :

కాలశ్రేణులలోని ఋతు ప్రభావాలను తొలగించడానికి రెండు పద్ధతులున్నాయి. అవి సంకలన (కూడిక) నమూనా, గుణకార నమూనా. సంకలన నమూనాలో ఋతు ప్రభావాలను తొలగించడానికి ఇచ్చిన విలువల నుంచి లేదా కాలశ్రేణులు శేషవిచరణాలనుంచి గాని ఋతుగత మార్పులను తీసివేయవలె. సూత్రం ఇలా వుంటుంది.

$$\bar{S}=(O-T)-S \text{ లేదా } \bar{S}=O-S$$

$\bar{S}$ అనగా ఋతు ప్రభావాల తొలగింపు (Deseasonalised data)

O అనగా కాలశ్రేణుల ఇచ్చిన విలువ (Observed Value of Time series)

T అనగా Y శ్రేణి యొక్క ప్రవృత్తి విలువ (Trend value of 'Y' series)

S అనగా ప్రేక్షిత లేదా ఇచ్చిన విలువల ఋతు సంబంధ మార్పులు.

గుణకార నమూనాలో - ప్రవృత్తి తొలగించబడిన కాలశ్రేణుల దత్తాంశంను లేదా ప్రేక్షిత విలువను, సంబంధిత ఋతుసంబంధ పరిణామంతో భాగించవలె.

$$\text{సూత్రం} = \bar{S}=\frac{O/T}{S.E.} \text{ లేదా } \bar{S}=\frac{O}{S.E.}$$

O అనగా కాలశ్రేణుల ఇచ్చిన విలువ లేదా ప్రేక్షిత విలువ

SE అనగా ఋతుసంబంధ పరిణామ విలువ (Seasonal effect)

SE ని ఋతు సంబంధ సూచీని 100 చే భాగించి లెక్కిస్తారు. కాబట్టి

$$SE = \frac{SI}{100}$$

4.9 ఋతు సంబంధ సూచీవలన ప్రయోజనాలు - నష్టాలు :

ప్రయోజనాలు : -

1. కాలశ్రేణులలోని ఋతు విచరణాలను తేలికగా అర్థం చేసుకోవడానికి ఋతు సంబంధ సూచీలు ఉపయోగపడతాయి.
2. ఆర్థికపరమైన అంచనాలు వేయడానికి నిర్వహణ పరమైన నిర్ణయాలు చేయడానికి ఋతుసంబంధ సూచీలను ఉపయోగించవచ్చును. ఉదా:- అధిక ఉత్పత్తిని సాధించడం, లాభాలను మెరుగు పరచుకోవడం మొదలైనవి.
3. దత్తాంశంలోని స్వల్పకాలిక హెచ్చుతగ్గులను అధ్యయనం చేయడానికి ఋతుప్రభావాల తొలగింపు ఎంతో ఉపయోగపడుతుంది.

నష్టాలు :-

1. ఋతు సంబంధ సూచీల లెక్కించే విధానాలు వాస్తవాలకు దూరంగా ఉన్న భావనలపై ఆధారపడి ఉంటాయి. ఉదా: - అన్ని ఋతువులలో మార్పులు క్రమబద్ధంగా నిర్దిష్టంగా ఏర్పడతాయి అని భావించడం.
2. ఋతుసంబంధ సూచీలను లెక్కించడానికి నిర్దిష్టమైన పద్ధతి గాని, సంక్షిప్త విధానం గాని లేకపోవడం.
3. ఋతుసంబంధ సూచీలను లెక్కించడానికి ఉపయోగించే కొలతల విలువలు సామాన్యంగా 100తో విభేదిస్తుంది. కాబట్టి ఒక సం॥లో ప్రతి నెలకు ఋతుసంబంధ సూచిక 100కు దగ్గరగా ఉంటే ఋతు విచరణాలు పెద్దగా లేవని, వాటిలో మార్పులు కేవలం యాదృచ్ఛికం అని భావించవలె.

4.10 ప్రశ్నలు :

1. ఋతుసంబంధ లేదా ఋతు పవన సూచీలు అనగానేమి ? వాటిని కొలవడానికి కారణాలను వివరించండి.
2. ఋతుసంబంధ విచరణాలను కొలిచే పద్ధతులను చర్చించండి.
3. సామాన్య సగటు పద్ధతి గురించి ఉదాహరణాత్మకంగా వివరించండి.
4. ఋతుసంబంధ సూచీవలన ప్రయోజనాలు, పరిమితులు పేర్కొనండి.
5. ప్రవృత్తి నిష్పత్తి పద్ధతి గురించి వివరించండి.

6. చలిత మధ్యమాల నిష్పత్తి గురించి వివరించండి.

7. లింక్‌సాపేక్షాల పద్ధతి గురించి వివరంగా పేర్కొనండి.

8. 'ఋతు ప్రభావాలను తొలిగించడం' అంటే ఏమిటి ? దాని విధానం ఏమిటి ?

4.11 అభ్యాసాలు :

1. క్రింది దత్తాంశానికి ఋతుసంబంధ సూచీలను సామాన్య సగటు పద్ధతి ద్వారా లెక్కించండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
2000	80.6	89.6	92.0	96.0
2001	100.2	106.2	110.6	119.0
2002	94.4	100.2	104.2	110.4
2003	110.8	118.0	123.2	130.6

2. ఈ క్రింది వివరాలకు సామాన్య సగటు పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచిని కనుగొనండి.

సం॥	I త్రైమాసికం	II త్రైమాసికం	III త్రైమాసికం	IV త్రైమాసికం
1999	216	204	240	210
2000	228	210	246	222
2001	222	198	252	240
2002	228	222	252	234
2003	234	222	258	246

3. ఈ క్రింది వివరాలకు సామాన్య సగటు పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీ నిర్మించండి.

	1999	2000	2001	2002	2003
జనవరి	400	450	470	500	525
ఫిబ్రవరి	380	410	435	460	475
మార్చి	375	395	425	435	500
ఏప్రిల్	340	370	398	410	435

మే	330	350	370	380	420
జూన్	315	335	350	375	390
జులై	325	340	350	385	415
ఆగస్టు	350	358	380	410	435
సెప్టెంబర్	370	389	400	420	460
అక్టోబర్	400	420	430	460	450
నవంబర్	420	445	470	490	465
డిసెంబర్	445	460	470	510	490

4. క్రింది దత్తాంశం నుంచి ప్రవృత్తి, నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీలను లెక్కించండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
1999	120	160	144	136
2000	136	208	160	176
2001	160	232	216	192
2002	216	304	272	248
2003	320	368	344	328

5. క్రింది దత్తాంశం నుంచి ప్రవృత్తి నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీలను గణన చేయండి.

సం॥	I త్రైమాసికం	II త్రైమాసికం	III త్రైమాసికం	IV త్రైమాసికం
1999	340	300	305	315
2000	350	290	280	300
2001	340	315	340	335
2002	325	280	280	310
2003	300	275	275	290

6. క్రింది దత్తాంశం నుంచి చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీని కనుగొనండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
2000	450	360	324	300
2001	516	390	378	480
2002	540	432	396	510
2003	600	468	432	558

7. దిగువ దత్తాంశానికి చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతిని ఉపయోగిస్తూ కూడికల నమూనా ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీలను లెక్కించండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
2000	128.00	108.00	117.60	136.00
2001	127.20	97.60	124.80	144.00
2002	130.40	95.20	135.20	153.60
2003	136.80	105.60	120.00	149.60

8. క్రింది దత్తాంశం నుంచి చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీని కనుగొనండి.

సం॥	I త్రైమాసికం	II త్రైమాసికం	III త్రైమాసికం	IV త్రైమాసికం
1999	360	310	342	432
2000	378	333	351	288
2001	369	310	342	369
2002	405	324	324	360
2003	396	342	342	378

9. క్రింది వివరాల నుంచి చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీని కనుగొనండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
2001	272	244	244	252
2002	260	232	264	244
2003	272	252	252	268

10. క్రింది దత్తాంశం నుంచి చలిత మాధ్యమాల నిష్పత్తి పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీని లెక్కించండి.

సం॥	క్వార్టర్	విలువలు	4సం॥ల చలిత మొత్తాలు
2000	I	75	-
	II	60	-
	III	54	63.38
	IV	59	63.38
2001	I	86	67.13
	II	65	70.88
	III	63	74.00
	IV	80	75.38
2002	I	90	76.63
	II	72	77.63
	III	66	79.50
	IV	85	81.50
2003	I	100	83.00
	II	78	84.75
	III	72	-
	IV	93	-

11. క్రింది వివరాలకు లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచీని కనుగొనండి.

త్రైమాసికం	1999	2000	2001	2002	2003
I	210	245	217	217	238
II	182	196	203	217	252
III	154	154	196	175	182
IV	217	252	224	245	231

12. ఈ క్రింది దత్తాంశం నుంచి లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి ద్వారా ఋతుసంబంధ సూచిని లెక్కించండి.

క్వార్టర్	1999	2000	2001	2002	2003
I	72.0	64.8	81.6	86.4	79.2
II	77.0	94.8	78.0	69.6	87.6
III	93.6	100.8	111.6	90.0	96.0
IV	104.4	87.6	76.8	102.0	85.2

13. లింక్ సాపేక్షాల పద్ధతి ద్వారా క్రింది సమాచారానికి ఋతుసంబంధ సూచీకను కనుగొనండి.

సం॥	I క్వార్టర్	II క్వార్టర్	III క్వార్టర్	IV క్వార్టర్
1999	234	226	213	219
2000	225	204	198	213
2001	234	219	219	231
2002	240	207	198	216
2003	210	195	183	204

14. క్రింది దత్తాంశానికి కార్ల్‌పియర్సన్ పద్ధతి ప్రకారం ఋతుసంబంధ సూచీని కనుగొనండి.

త్రైమాసికం	2000	2001	2002	2003
I	130	136	140	120
II	116	126	118	110
III	112	126	112	102
IV	122	134	104	116

రచయిత

శ్రీ టి. నాగేశ్వరరావు

పాఠం 5

సూచీ సంఖ్యలు

ఉద్దేశ్యం :

ఈ పాఠ్యాంశం అధ్యయనం చేయడం వలన మీరు :-

* సూచీ సంఖ్యల అర్థము, నిర్వచనాలు, వాటి లక్షణాలు, వాటి ఉపయోగములు, వాటి వర్గీకరణ గురించి తెలుసుకొంటారు.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

5.1 సూచీ సంఖ్యల అర్థము

5.2 సూచీ సంఖ్యల నిర్వచనాలు

5.3 సూచీ సంఖ్యల లక్షణాలు

5.4 సూచీ సంఖ్యల ఉపయోగము

5.5 సూచీ సంఖ్యల వర్గీకరణ లేక సూచీ సంఖ్యల రకాలు

5.5.1 ధరల సూచీ సంఖ్యలు

5.5.2 రాశి సూచీ సంఖ్యలు

5.5.3 విలువ సూచీ సంఖ్యలు

5.6 అభ్యాసము

5.1 సూచీ సంఖ్యల అర్థము:

ఒక విషయములో రెండు విభిన్న సమయములకు సాపేక్ష మార్పును సూచీ సంఖ్యల ద్వారా తెలుసుకుంటాము. ప్రప్రథమముగా G.R. CARLI అనే గణాంక శాస్త్రవేత్త ద్వారా ఇవి ధరలలో మార్పులను మాత్రమే అధ్యయనం చేయుటకు నిర్మించబడినవి. సూచీ సంఖ్యలు ప్రస్తుతము అన్ని రంగాలలో ఉపయోగపడుచున్నవి. ఒక కాలానికి మరియొక కాలానికి ధరలలో పెరుగుదల లేక తగ్గుదలను, పారిశ్రామిక ఉత్పత్తులలో పెరుగుదల లేక తగ్గుదలను, ఎగుమతులలో పెరుగుదల లేక తగ్గుదలను, నేరాలలో పెరుగుదల లేక తరుగుదలను అనేక అంశాలలో మార్పులను పరిశీలించుటకు ఈ సూచీ సంఖ్యలు ఉపయోగంలో ఉన్నాయి.

ఒక వర్గములో ఉన్న అన్ని చలరాశులు ఒకే దిక్కుకు మార్పు చెందవు. కొన్ని ధరలు పెరగవచ్చును, మరికొన్ని తగ్గవచ్చును, కొన్ని ధరలు స్థిరముగా ఉండవచ్చును. అటువంటి పరిస్థితులలో వాటిని తెలుసుకొను సామాన్య సాధనమును సూచీ సంఖ్య అంటారు.

ఆర్థిక పరిస్థితులలో మార్పులను తెలుసుకొనుటకు ఉపయోగపడే సాధనము, ద్రవ్యోల్బణ, ప్రతి ద్రవ్యోల్బన ప్రవృత్తులకు సూచీలుగా కూడా ఇవి పనికి వస్తాయి. కనుక సూచీ సంఖ్యలను "ఆర్థిక బారమితులు" అని కూడా అంటారు.

5.2 సూచీ సంఖ్యల నిర్వచనము:

HORASE SECRIST ప్రకారము " రెండు అంశాలకు సంబంధించిన పరిమాణాత్మక దత్తాంశంలోని మార్పులు వివిధ కాలాలలో, వివిధ ప్రదేశాలలో ఏ విధముగా పరిణమిస్తున్నాయో తెలుసుకోవడానికి ఉపయోగించే గణాంక కాలమానమే సూచీ సంఖ్యలు."

CROXTON AND COWDAN ఈ విధముగా నిర్వచించారు. "పరస్పర సంబంధము కలిగియున్న చలరాశుల సముదాయ పరిమాణంలోని వ్యత్యాసాలను కొలవడానికి ఉపయోగపడే సాధనాలే సూచీ సంఖ్యలు."

ఇర్వింగ్ ఫిషర్ ఈ విధంగా నిర్వచించినాడు. " ఒకే సంఖ్యలో గణన చేయబడిన సూచీ సంఖ్యలు ఏ విభిన్న నిష్పత్తుల నుండి కనుగొనబడినవో, అలాంటి నిష్పత్తుల సాధారణ ప్రవృత్తిని న్యాయాత్మకంగా సూచిస్తాయి."

BLAIR ప్రకారం " ఇవి ప్రత్యేక తరహా సగటుగా పేర్కొనవచ్చు. సూచీ సంఖ్యలు సంబంధిత చలరాసుల సమూహములోని నికర మార్పును కొలవడానికి ఉపయోగపడడమే కాకుండా, ఒక నిర్ణీత కాలములో మార్పు పరిమాణమును కూడా కొలవవచ్చు."

పై నిర్వచనాలను బట్టి సూచీ సంఖ్యల వలన చలరాశులలోని మార్పులను కాలాను సారంగా పరిశీలించడానికి రూపొందించిన ప్రత్యేకమైన సగటు అని చెప్పవచ్చును.

5.3 సూచీ సంఖ్యల ప్రత్యేక లక్షణాలు:

వివిధ గణాంక శాస్త్రవేత్తల నిర్వచనాల ప్రకారము సూచీ సంఖ్యల ప్రాముఖ్యతను ఇనుమడింప చేయడానికి క్రింది లక్షణాలు తెలియజేయడం జరుగుతుంది.

5.3.1 సూచీ సంఖ్యలు ప్రత్యేకమైన సగటులు : రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ శ్రేణులలో విభిన్నమైన గణాంక యూనిట్లు ఉపయోగించబడితే, ఆ శ్రేణులలోని సగటు మార్పును తెలుసుకొనుటకు సూచీ సంఖ్యను ఉపయోగిస్తారు.

ఉదా: వినియోగదారుల సూచీ సంఖ్య నిర్మాణములో ఆహారము, బట్టలు, ఇంధనము, అద్దె, ఇతర ఖర్చులు వివిధ పరిమాణాలలో ఇవ్వబడతాయి. సూచీ సంఖ్యల ప్రక్రియను ఉపయోగించి పై అంశాలన్నింటికీ సగటును గణన చేయవచ్చును. కనుక దీనిని ప్రత్యేక సగటుగా భావిస్తారు.

5.3.2. నికర మార్పును కొలుచును : ఒకే కోవకు చెందిన ఒక సమూహంలోని వివిధ చలరాశులలోని నికర మార్పులు కొలవడానికి అనగా పెరుగుదలను, తరుగుదలను సూచించుటకు ఈ సూచీ సంఖ్యలు ఉపయోగపడతాయి.

ఉదా: వైజాగ్‌లోని శ్రామిక వర్గ జీవన వ్యయ సూచీ 1980తో పోల్చినపుడు 1985లో 135 అని తెలిసినపుడు జీవన వ్యయంలో 35% నికర పెరుగుదల అని తెలియజేస్తుంది. అదే విధముగా సూచీ సంఖ్యలు పారిశ్రామిక ఉత్పత్తిలో, అమ్మకాలలో లాభాలు మొదలైన వాటిలో నికర మార్పులను లెక్కిస్తాయి.

5.3.3. కొంత కాల వ్యవధి మీద మార్పుల ప్రభావమును సూచీ సంఖ్యలు లెక్కిస్తాయి : ఒక నిర్ణీత కాలంలో వచ్చే మార్పులను కొలవడానికి ఎక్కువగా ఉపయోగించే గణాంక పద్ధతి సూచీ సంఖ్యలు. కనుక రెండు కాలములకు సంబంధించిన వ్యవసాయ ఉత్పత్తులను, పారిశ్రామిక ఉత్పత్తులను, ఎగుమతులను, దిగుమతులను, వేతనాలు మొదలైన వాటిని సరిపోల్చవచ్చును.

5.4 సూచీ సంఖ్యల ఉపయోగాలు:

5.4.1. విధానాలు రూపొందించడం : అనేక ఆర్థిక, వ్యాపారపరమైన విధానాలను రూపొందించడం సూచీ సంఖ్యల పైనే ఆధారపడి యున్నాయి.

ఉదా: పెరుగుతున్న ధరలకు అనుగుణంగా ఉద్యోగులకు ప్రభుత్వము చెల్లించే కరువుభత్యము ఎంత మేరకు పెంచాలి అనేది జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య పైనే ఆధారపడి ఉంటుంది.

5.4.2. ద్రవ్యము కొనుగోలు శక్తి : ఫిషర్ యొక్క పరిమాణాత్మక సిద్ధాంతం ద్వారాద్రవ్యము కొనుగోలు శక్తి ధరల సూచీపై ఆధారపడి ఉంటుందని తెలుసుకొనవచ్చు. అనగా ధరలు పెరిగనపుడు కొనుగోలు శక్తి తగ్గుతుందని, ధరలు తగ్గినపుడు కొనుగోలు శక్తి పెరుగుతుందని చెప్పవచ్చును.

5.4.3. వేతనాలలో సర్దుబాటు : యాజమాన్యము, కార్మికుల మధ్య వివాదాలు, మనస్పర్థలు నివారించడానికి వేతనాలలో అవసరమైన సర్దుబాట్లు చేయడానికి జీవన వ్యయ సూచీ ఉపయోగకారిగా ఉంటుంది.

5.4.4. జీవన ప్రమాణాలను పోల్చడము : స్థిర ఆదాయ వర్గపు ప్రజలకు సంబంధించి జీవన వ్యయ సూచీలో పెరుగుదల వారి తగ్గుతున్న జీవన ప్రమాణాలను సూచిస్తుంది. లేక సూచీల తగ్గుదల వారి పెరుగుతున్న జీవన ప్రమాణాలకు ప్రతిబింబముగా చెప్పవచ్చును.

5.4.5. ఆర్థిక బారమితులు : సూచీ సంఖ్యలు ఆర్థిక విషయాలలో వచ్చే మార్పులను తెలియజేస్తాయి. మరియు రాబోయే కాలంలో మార్పులను కూడా తెలుపుతాయి. కావున సూచీ సంఖ్యలను ఆర్థిక బారమితులు అంటారు.

5.4.6. సరిపోల్చడము : సూచీ సంఖ్యల ద్వారా ఒక ప్రాంతములోని అభివృద్ధిని మరియొక ప్రాంతపు అభివృద్ధితో లేక ఒక సంస్థ అభివృద్ధిని మరియొక సంస్థ అభివృద్ధితో సరిపోల్చి దీని వలన సరియైన నిర్ణయాలు తెలుసుకోవడానికి వీలవుతుంది.

5.4.7. ధరల స్థాయిలో మార్పుల అధ్యయనం : ఆర్థిక పరిస్థితులను విశ్లేషణ చేయడానికి గాను వివిధ కాలములలో ధరలలోని మార్పులను అధ్యయనం చేయడానికి సూచీ సంఖ్యలు ప్రయోజనకారిగా ఉంటాయి.

5.4.8. ధరల మార్పుకు దత్తాంశమును సవరించడము : ధరలలోని మార్పునకు అనుగుణంగా అసలు దత్తాంశమును సర్దుబాటు చేయడమును DAFLATING అంటారు. దీని వలన వాస్తవిక ఆదాయం, వాస్తవిక అమ్మకాలను అంచనా వేయవచ్చును.

5.4.9. మార్పు ప్రవృత్తిని తెలుసుకోవడము : సూచీ సంఖ్యల ద్వారా దత్తాంశమునకు సంబంధించిన మార్పు ప్రవృత్తిని తెలుసుకోవడానికి సాధ్యమవుతుంది. వస్తువుల ధరలలో ఎగుమతి, దిగుమతులలో ప్రవృత్తిని తెలుసుకొని అవసరమైన నిర్ణయాలను చేయవచ్చును.

ఈ విధముగా సూచీ సంఖ్యలు నేడు ఆర్థిక, వాణిజ్య రంగాలలో విస్తృతంగా వాడుచున్నారని చెప్పవచ్చును. సూచీ సంఖ్యలు సమకూర్చే వివిధ ప్రయోజనాల వలన, గణాంక పద్ధతులలో ఇవి అత్యంత ప్రాముఖ్యతను సంతరించుకున్నవి.

5.5 సూచీ సంఖ్యల వర్గీకరణ లేక సూచీ సంఖ్యల రకాలు:

ఆర్థిక, వ్యాపార రంగాలలో ఉపయోగించే సూచీ సంఖ్యలను నాలుగు రకాలుగా వర్గీకరించవచ్చును.

(ఎ) ధరల సూచీ సంఖ్యలు

(బి) పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలు

(సి) విలువ సూచీ సంఖ్యలు

(డి) ప్రత్యేక అవసర సూచీ సంఖ్యలు

5.5.1. ధరల సూచీ సంఖ్యలు : సర్వ సాధారణముగా సూచి సంఖ్యలన్నింటిలోనూ, ధరల సూచీ సంఖ్యలను ఆర్థిక, వ్యాపార రంగాలలో ఉపయోగిస్తారు. వస్తువుల ధరల్లోని మార్పులను అధ్యయనం చేయడానికి ఉపయోగపడే సూచీనే ధరల సూచీ అంటారు. వివిధ వస్తువుల ప్రస్తుత కాల ధరలతో ఆధార కాల ధరలతో పోల్చి ఏర్పడిన మార్పునే శాతాలలో సూచిస్తారు. ధరల సూచీ సంఖ్యలను రెండు రకాలుగా విభజించవచ్చును.

(ఎ) టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యలు

(బి) చిల్లర ధరల సూచీ సంఖ్యలు

ధరల స్థాయి మార్పును టోకు ధరల సూచీలు అధ్యయనం చేస్తాయి. వాటాలు, బ్యాంకు డిపాజిట్లు, బాండ్లు, వినియోగ వస్తువుల ధరలలో మార్పును చిల్లర ధరల సూచీ సంఖ్యలు సూచిస్తాయి.

5.5.2. పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలు : వస్తూత్పత్తి, వినియోగము కంపెనీకి సంబంధించిన భౌతికపరమైన పరిమాణంలో సంభవించు మార్పులను తెలుసుకోవడానికి ఉపయోగపడే సూచీలను పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలు అంటారు.

5.5.3. విలువ సూచీ సంఖ్యలు : వస్తువుల విలువలలో వచ్చే మార్పులను పోల్చడానికి విలువ సూచీ సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తారు. వివిధ వస్తువుల ప్రస్తుత సంవత్సరపు విలువ మొత్తాన్ని ఆధార సంవత్సరపు విలువ మొత్తంతో భాగించి, మార్పును శాతాలలో చూపడానికి ఉపయోగపడే సూచీనే విలువ సూచీ సంఖ్య అంటారు.

5.5.4. ప్రత్యేక అవసర సూచీ సంఖ్యలు : నిర్దిష్టమైన కొన్ని ప్రత్యేక అవసరాల నిమిత్తం నిర్మించబడిన సూచీలనే ప్రత్యేక అవసర సూచీ సంఖ్యలు అంటారు. జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యలు ఈ కోవకు చెందినవిగా చెప్పవచ్చును.

5.6 అభ్యాసము :

I. ఈ క్రింది వానికి సంక్షిప్తముగా జవాబులు వ్రాయండి.

1. సూచీ సంఖ్యలు అంటే ఏమిటి?
2. సూచీ సంఖ్యల లక్షణాలు తెలుపుము.
3. ధర సూచీలు అనగానేమి?
4. రాశి సూచీలు అనగానేమి?
5. విలువ సూచీలు అనగానేమి?

II. ఈ క్రింది వానికి విపులముగా జవాబులు వ్రాయండి.

1. ఆర్థిక, వ్యాపార రంగాలలో సూచీ సంఖ్యల ప్రాముఖ్యమేమిటి?
2. " సూచీ సంఖ్యలు - ఆర్థిక భారమితులు " చర్చించండి.

రచయిత

శ్రీ కె. ఉపాధ్యాయ

పాఠం 6

సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణము

ఉద్దేశ్యము:

ఈ పాఠ్యాంశం అధ్యయనం చేయడం వలన మీరు :-

* సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఎదురయ్యే సమస్యలను వివరించగల్గుతారు
* సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణం విధానములను గుర్తించగలుగుతారు.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

6.1 పరిచయము:

రెండు కాలాల మరియు వ్యవధుల మధ్య వివిధ వస్తువుల లోని మార్పులను లెక్కించడానికి లేక సరిపోల్చడానికి సూచీ సంఖ్యలు శక్తివంతమైన గణాంక సాధనాలు. అందువలన వీటిని నిర్మించుటలో ఎంతో శ్రద్ధ, జాగ్రత్తలు తీసుకోవాల్సిన ఆవశ్యకత ఉన్నది. వీటి ద్వారా ఖచ్చితమైన విలువలను పొందవచ్చును. సూచీ సంఖ్యలను సముచితంగా గణన చేయకపోతే ప్రమాదపూరిత సాధనాలుగా మారతాయి. వీటిని నిర్మించునపుడు సాధారణంగా కొన్ని సమస్యలు ఎదురవుతాయి.

6.2 సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణములో ఎదురయ్యే సమస్యలు:

6.2.1. సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణ ఉద్దేశ్యము : సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణ ఉద్దేశ్యమును స్పష్టముగా నిర్వచించవలెను. ఉద్దేశ్యమును ముందుగా నిర్ణయించుట వలన ఎంపిక చేయవలసిన అంశాలు, వాటి భారాలు, ఆధార సంవత్సరము మరియు ఉపయోగించవలసిన సగటు సులభతరమౌతాయి. A.L. Tools ప్రకారం సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో దేనిని కొలవదలచినది, ఆ కొలతలను ఎందుకు ఎంపిక చేసినది స్పష్టముగా పేర్కొనాలి. వీటి నిర్మాణ ఉద్దేశ్యమును నిర్ణయించనపుడు సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణ చర్యలను చేపట్టడము అసాధ్యము అవుతుంది. ఉద్దేశ్యము నిర్ణయించక సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణము జరిగితే కాలయాపన, వృధా ఖర్చు అవడమే కాకుండా సేకరించిన సమాచారము నిరుపయోగము అవుతుంది.

6.2.2. అంశాల ఎంపిక : ధరలలో ఏర్పడే మార్పులను కొలవడానికి అవసరమైన వస్తువులను మాత్రమే ఎంపిక చేయాలి. వీటి నిర్మాణంలో అన్ని వస్తువులను నిర్మాణంలోనికి (పరిగణనలోనికి) తీసుకోవడం సాధ్యము కాదు. కావున ఎక్కువ మంది ప్రజల రుచులకు, అలవాట్లకు, సాంప్రదాయాలకు మరియు వారి అవసరాలకు అనుగుణమైన వస్తువులను మాత్రమే ఎంపిక చేసి సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఉపయోగించాలి.

ప్రమాణీకరించిన మరియు శ్రేణీకరించిన వస్తువులను మాత్రమే ఎంపిక చేసినట్లయితే వాటిని సులభముగా గుర్తించడము, సరిపోల్చడము సాధ్యమవుతుంది. ఎంపిక చేయవలసిన అంశాల సంఖ్యను నిర్ణయించడానికి ఒక నిర్దిష్టమైన సూత్రము అంటూ ఏదీ లేదు. అంశాల సంఖ్య ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు సూచీ సంఖ్యల విలువలో దోషాన్ని తగ్గించవచ్చును. అయితే అంశాలు లభ్యమయ్యే ఆర్థిక వనరులను బట్టి, కాలాన్ని బట్టి సూచీ సంఖ్యల ఉపయోగాన్ని నిర్ణయించవచ్చును.

6.2.3. ధరల కొటేషన్ సేకరించడము : అంశాలనుఎంపిక చేసిన తరువాత వస్తువుల ధరను సేకరించడము సమస్యగా ఉండవచ్చును. ఎందుకనగా ఎంపిక చేసిన వస్తువు వివిధ మార్కెట్లలో వివిధ ధరలను కలిగి యుండవచ్చును. అన్ని మార్కెట్లలో దరలను సేకరించడము సాధ్యము కాదు. కనుక వస్తువుల ధరలను సేకరించడానికి అనుగుణమైన మార్కెట్లను దుకాణాలను ఆధారంగా చేసుకోవాలి. కాలానుగుణంగా మార్పు చెందిన ధరల వివరాలను తెలుసుకోవడానికి కొన్ని ఏజన్సీల నియామకము కూడా జరుపవలెను. సేకరించవలసిన టోకు మరియు చిల్లర వర్తకపు ధరల నిర్ణయాన్ని కూడా ముందుగానే నిర్ణయించాలి. చిల్లర టోకు ధరల కంటే టోకు ధరకే ఎక్కువ ప్రాముఖ్యాన్ని ఇస్తారు. చిల్లర ధర కంటే టోకు ధర ఎక్కువ స్థిరత్వాన్ని కలిగి యుంటుంది.

6.2.4. భారాలను ఎంపిక చేయడము : సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణానికి ఎంపిక చేయవలసిన అంశాలు సమాన ప్రాధాన్యత కలిగి ఉండకపోవచ్చు. అయితే ఆయా వస్తువుల ప్రాముఖ్యతను బట్టి ఇచ్చే విలువలనే భారాలు అని అంటారు. సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణానికి భారాలను రెండు పద్ధతుల ద్వారా ఇవ్వవచ్చును.

(ఎ) ప్రచ్ఛన్న / పరోక్ష భారాలు

(బి) స్పష్టమైన భారాలు

ప్రచ్ఛన్న భారాల పద్ధతిలో ఎంపిక చేసిన వస్తువుల భారాలను స్పష్టముగా నిర్ణయించరు. అయితే ఎక్కువ ప్రాముఖ్యత గల వస్తువుల నుండి తక్కువ రకాలు ఎంచుకొని సూచీ సంఖ్యలతో చేర్చుతారు. స్పష్టమైన భారాల పద్ధతిలో నిర్ణయించిన వుస్తువులకు భారాలను స్పష్టముగా నిర్ణయిస్తారు.

6.2.5 ఆధార సంవత్సరము ఎంపిక: వర్తమాన సంవత్సరంలో వస్తువుల ధరలలో మార్పులను ఒక ప్రమాణ కాలంలోని వస్తువు ధరతో పోల్చడానికి ఎంపిక చేసిన ప్రామాణ కాలాన్నే ఆధార కాలము అని అంటారు. ఈ ఆధార కాలము ఒక దినము, ఒక వారము, పక్షము, నెల లేదా సంవత్సరము అయినా కావచ్చును. ఆధార కాలానికి సూచీ సంఖ్యను 100 గా పరిగణిస్తారు. ఎందుకనగా మార్పును శాతాలలో వ్యక్త పరుస్తాము. ఈ ఆధార కాలము ఎంపిక సక్రమముగా జరిగితే ధరలోని మార్పును సులభముగా గ్రహించవచ్చును. కావున ఆధార కాలమును ఎంపిక చేసేటప్పుడు ఈ దిగువ అంశాలను పరిగణనలోనికి తీసుకోవాలి.

(ఎ). ఆధార కాలము ప్రాతినిధ్యము వహించేదిగా, సాధారణ కాలంగా ఉండాలి. ఆధార కాలం ధరలో మార్పును అధ్యయనం చేసి సూచీ సంఖ్యలు నిర్మిస్తాము. కనుక ఆధార కాలము వర్తమాన కాలమునకు మరియు సంవత్సరాన్ని బట్టి నిర్ణయిస్తాము. ఉదాహరణకు 1997వ సంవత్సరము వస్తువు ధరలలో మార్పును అధ్యయనం చేయడానికి 1996వ సంవత్సరమును ఆధార సంవత్సరముగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

(బి). ఆధార కాలమును ఎంపిక చేసేటప్పుడు ఆ ఆధార కాలము స్థిరముగా ఉండవలెనా? లేక గొలుసు ఆధారముగా ఉండవలెనా? అని నిర్ణయము తీసుకోవలెను. స్థిర ఆధార పద్ధతిలో ఒక ప్రత్యేక సంవత్సరమును ఆధార సంవత్సరముగా తీసుకొని మిగతా సంవత్సరాలకు ఈ ఆధార సంవత్సర ధర ఆధారంగా సూచీ సంఖ్యలు నిర్మిస్తాము. అయితే గొలుసు ఆధార సంవత్సర పద్ధతిలో ఆధార సంవత్సరము స్థిరముగా ఉండదు. సూచీ సంఖ్య గణన చేసే ప్రతి సంవత్సరమునకు ఆధార సంవత్సరము మారుతూ ఉంటుంది. సూచీ సంఖ్యను నిర్మించే సంవత్సరమునకు ముందు సంవత్సరము ఆధార సంవత్సరము అవుతుంది.

6.2.6. సగటును ఎంపిక చేయడము : సూచీ సంఖ్యలు ప్రత్యేక సగటులు కనుక వీటి నిర్మాణంలో కేంద్రస్థానపు కొలతలు ఉపయోగిస్తాము. ఎక్కువగా అంకమధ్యమము లేక గుణమధ్యమమును వాడతారు. చలరాశులలోని సాపేక్ష మార్పులను అధ్యయనం చేయడానికి సూచీ సంఖ్యలు నిర్మిస్తారు. అంకమధ్యమము పరమ మార్పులనే కొలుస్తుంది. కనుక ఇది సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణమునకు సరైన సగటు కాదు. గుణమధ్యమము సాపేక్షిక మార్పులను కొలుస్తుంది. ఖచ్చితత్వము అవసరము అని భావించినపుడు సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో దీనినే ఎక్కువగా వాడతారు. అయితే గుణమధ్యమము గణన చేయడములో ఉన్న ఇబ్బందుల వలన అంకమధ్యమము ఎక్కువ ఉపయోగములోనున్నది.

6.2.7. సరైన సూత్రము ఎంపిక చేయడము : సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణమునకు అనేక రకాలైన సూత్రాలు అందుబాటులో ఉన్నవి. వానిలో ఏ సూత్రము ఆమోదయోగ్యము అయినదో గమనించి దాని ద్వారా సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణమును చేపట్టవలెను. " ఇర్వింగ్ ఫిషర్ ప్రకారము ఏ సూత్రము అయితే కాల పరివర్తన పరీక్షను, అంశ పరివర్తన పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తుందో దానిని ఆదర్శ సూచీ సూత్రంగా" భావించాలని తెలియపరచినాడు.

6.3 సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణ పద్ధతులు:

సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణమునకు ఉపయోగించే వివిధ పద్ధతులను ఈ దిగువ పట్టీ ద్వారా విశదీకరించవచ్చును.

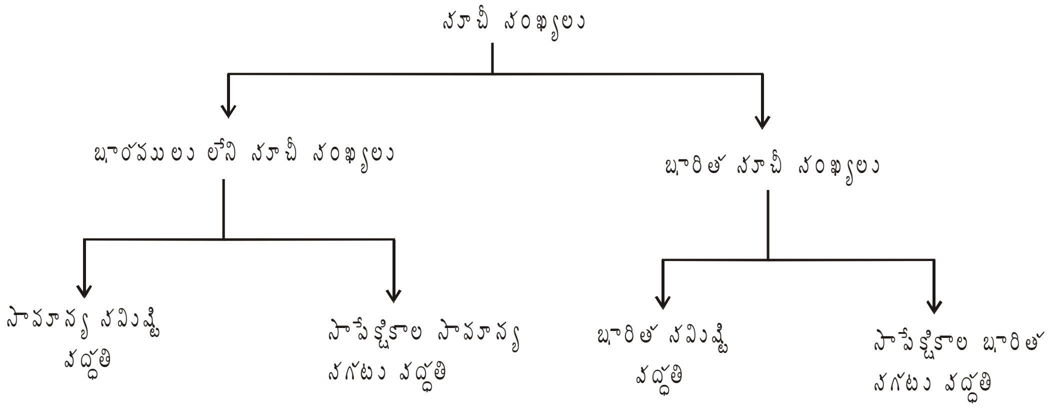
(ఎ) భారములు లేని సూచీ సంఖ్యలు

(బి) భారములు గల సూచీ సంఖ్యలు

ఇవి దిగువ విధముగా విభజింపబడినవి.

(ఎ) సామాన్య సమిష్టి పద్ధతి

(బి) సాపేక్షికాల సామాన్య సగటు పద్ధతి



6.4 భారాలు లేని సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించుట:

భారములు లేని సూచీ సంఖ్యలను రెండు విధములుగా విభజించవచ్చును.

6.4.1. సామాన్య సమిష్టి పద్ధతి : సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించడానికి ఉపయోగించే సులభమైన పద్ధతులలో ఇది చాలా ముఖ్యమైనది. సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణములో ఈ దిగువ క్రమమును పాటించాలి.

$P_{01} = \dfrac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100$ అనే సూత్రమును ఉపయోగించి సూచీ సంఖ్యను వర్తమాన కాలమునకు గణన చేయవచ్చును.

$\sum P_1 =$ ప్రస్తుత సంవత్సరములలోని వివిధ వస్తువుల ధరలను కూడగా వచ్చిన మొత్తము

$\sum P_0 =$ ఆధార సంవత్సరములలోని అవే వస్తువుల ధరలను కూడగా వచ్చిన మొత్తము

ఉదా(1): దిగువ వివరాలతో సామాన్య సమిష్టి పద్ధతి ద్వారా సూచీ సంఖ్యను నిర్మించండి.

వస్తువు	-	A	B	C	D
1994లో ధర	-	15	5	2.25	6
1995లో ధర	-	18	8	4	7

జవాబు:

వస్తువు	1994 ధర (P_0)	1995లో ధర (P_1)
A	15	18
B	5	8
C	2.25	4
D	6	7
	$\sum P_0 = 28.25$	$\sum P_1 = 37$

$$P_{01} = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100$$

$$= \frac{37}{28.25} \times 100 = 130.9$$

కావున 1995వ సం॥లో ధరలు సుమారుగా 31% పెరిగాయని చెప్పవచ్చును.

ఉదా (2): **క్రింది సమాచారమునకు సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించండి.**

ఎ. 1984వ సంవత్సరమును ఆధార సంవత్సరముగా తీసుకొని

బి. 1992వ సంవత్సరమును ఆధార సంవత్సరముగా తీసుకొని

సి. 1984 నుండి 1986వ సంవత్సరము సగటును ఆధారంగా తీసుకుంటూ నిర్మించండి.

సంవత్సరము	-	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
గోధుమ ధర (కి.రూ.)	-	4	5	6	7	8	10	9
సంవత్సరము	-	1991	1992					
గోధుమ ధర (కి.రూ.)	-	10	11					

జవాబు:

ఎ. ఆధార సంవత్సరముగా 1984ను తీసుకొని

సంవత్సరము	గోధుమ ధర	సాపేక్ష ధర (లేక) సూచీ సంఖ్య $\left[\frac{P_1}{P_0} \times 100, 1984 = 100\right]$
1984	4	100
1985	5	(5 ÷ 4) 100 = 125
1986	6	(6 ÷ 4) 100 = 150
1987	7	(7 ÷ 4) 100 = 175
1988	8	(8 ÷ 4) 100 = 200
1989	10	(10 ÷ 4) 100 = 250
1990	9	(9 ÷ 4) 100 = 225
1991	10	(10 ÷ 4) 100 = 250
1992	11	(11 ÷ 4) 100 = 275

బి. 1992వ సం॥ను ఆధారంగా తీసుకొని

సంవత్సరము	గోధుమ ధర	సూచీ సంఖ్య = 1992 = 100
1984	4	(4 ÷ 11) 100 = 36.3636
1985	5	(5 ÷ 11) 100 = 45.4545
1986	6	(6 ÷ 11) 100 = 54.5454
1987	7	(7 ÷ 11) 100 = 63.6363
1988	8	(8 ÷ 11) 100 =72.7272
1989	10	(10 ÷ 11) 100 = 90.9090
1990	9	(9 ÷ 11) 100 = 81.8181
1991	10	(10 ÷ 11) 100 = 90.9090
1992	11	(11 ÷ 11) 100 = 100

సి. ఆధార సంవత్సరము 1984 నుండి 1986 వరకు సగటు తీసుకొని

$$\textbf{సగటు ధర} = \frac{4+5+6}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

సంవత్సరము	గోధుమ ధర	సూచీ సంఖ్యలు
1984	4	(4 ÷ 5) 100 = 80
1985	5	(5 ÷ 5) 100 = 100
1986	6	(6 ÷ 5) 100 = 120
1987	7	(7 ÷ 5) 100 = 140
1988	8	(8 ÷ 5) 100 = 160
1989	10	(10 ÷ 5) 100 = 200
1990	9	(9 ÷ 5) 100 = 180
1991	10	(10 ÷ 5) 100 = 200
1992	11	(11 ÷ 5) 100 = 220

6.4.2. సాపేక్షికాల సామాన్య సగటు పద్ధతి : ఈ పద్ధతిలో ధరల సాపేక్షిక విలువలను కనుగొని వాటి సగటు విలువ ఆధారంగా సూచీ సంఖ్యను నిర్మిస్తారు. సగటు అంకమధ్యమము, గుణమధ్యమము, హరమధ్యమము ఏదైనా కావచ్చును. కాని వాడుకలో అంకమధ్యమము ద్వారా సూచీ సంఖ్య నిర్మాణము జరిగినపుడు ఈ దిగువ సూత్రమును ఉపయోగిస్తారు.

$$P_{01} = \frac{\sum I}{N}$$

$$I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

P_{01} = వర్తమాన సంవత్సరమునకు సూచీ సంఖ్య

P_1 = ప్రస్తుత సంవత్సరపు ధర

P_0 = ఆధార సంవత్సరపు ధర

N = అంశముల సంఖ్య

ఉదా (3): **దిగువ దత్తాంశం నుండి 1990వ సంవత్సరమును ఆధారంగా తీసుకొని అంకమధ్యమము, గుణమధ్యమము ద్వారా సూచీ సంఖ్యను కనుగొనుము.**

వస్తువులు	-	M	N	O	P	Q
1990లో ధర	-	20	30	10	25	40
1993లో ధర	-	25	30	15	35	45

జవాబు:

అంకమధ్యమము ద్వారా సూచీ సంఖ్యను లెక్కించుట:

వస్తువులు	1990లో ధర (P_0)	1993లో ధర (P_1)	సాపేక్షిక ధరలు $I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$
M	20	25	(25 ÷ 20) 100 = 125
N	30	30	(30 ÷ 30) 100 = 100
O	10	15	(15 ÷ 10) 100 = 150
P	25	35	(35 ÷ 25) 100 = 140
Q	40	45	(45 ÷ 40) 100 = 112.5
N = 5			$\sum I = 640$

సాపేక్షిక ధర సూచీ సంఖ్య $= \frac{\sum I}{N} = \frac{640}{5} = 128$

అనగా 5 వస్తువుల ధరలలో సగటు పెరుగుదల 28%.

గుణమధ్యమము ద్వారా సూచీ సంఖ్యను నిర్మించుట:

$$P_{01} = \text{Anti}\log\text{of } \frac{\sum \log x}{N}$$ అనగా

$\sum \log x =$ ధరల సాపేక్షికాల సంవర్గమానాల మొత్తము

$N =$ అంశముల సంఖ్య

వస్తువు	1990లో ధర (P_0)	1993లో ధర (P_1)	సాపేక్షిక ధరలు $I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	Log x
M	20	25	(25 ÷ 20) 100 = 125	2.0969
N	30	30	(30 ÷ 30) 100 = 100	2.0000
O	10	15	(15 ÷ 10) 100 = 150	2.1761
P	25	35	(35 ÷ 25) 100 = 140	2.1461
Q	40	45	(45 ÷ 40) 100 = 112.5	2.0512
N = 5				$\sum \log x = 10.4703$

$$P_{01} = \text{Antilogof } \frac{\sum \log x}{N}$$

$$= \text{Anti}\log\text{of } \frac{10.4703}{5}$$

$$= \text{Antilogof } 2.0941$$

$$= 124.2$$

అనగా 5 వస్తువుల ధరలలో సగటు పెరుగుదల 24.2% అని చెప్పవచ్చును.

ఉదా (4): దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా సామాన్య సగటు పద్ధతి ద్వారా మరియు సామాన్య సాపేక్షికాల సగటు పద్ధతి ద్వారా సూచీ సంఖ్యలను అంకమధ్యమము, గుణమధ్యమములతో నిర్మించండి.

వస్తువులు	-	A	B	C	D	E	F
1993లో ధర	-	40	60	20	50	80	110
1996లో ధర	-	50	60	30	70	90	110

జవాబు:

వస్తువు	1993లో ధర (P_0)	1996లో ధర (P_1)	సాపేక్షికాలు $I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	Log x
A	40	50	(50 ÷ 40) 100 = 125	2.0969
B	60	60	(60 ÷ 60) 100 = 100	2.0000
C	20	30	(30 ÷ 20) 100 = 150	2.1761
D	50	70	(70 ÷ 50) 100 = 140	2.1461
E	80	90	(90 ÷ 80) 100 = 112.5	2.0511
F	110	110	(110 ÷ 110) 100 = 100	2.0000
N=6	$\sum P_0 = 360$	$\sum P_1 = 410$	$\sum I = 727.5$	$\sum \log x = 12.4702$

సామాన్య సగటు పద్ధతి:

$$= \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100$$

$$= \frac{410}{360} \times 100 = 113.89$$

అనగా 6 వస్తువుల ధరలలో సగటు పెరుగుదల 13.89% గా చెప్పవచ్చును.

సాపేక్షికాల సామాన్య సగటు పద్ధతి (అంకమధ్యమము ద్వారా):

$$= \frac{\sum I}{N}$$

$$= \frac{727.5}{6} = 121.25$$

కావున సగటు పెరుగుదల 21.25% గా చెప్పవచ్చును.

సాపేక్షికాల సామాన్య సగటు పద్ధతి (గుణమధ్యమము ద్వారా):

$$= \text{Anti}\log \text{of } \frac{\sum \log x}{N}$$

$$= \text{Antilog of } \frac{12.4702}{6}$$

$$= \text{Antilog of } 2.0784$$

$$= 119.8$$

కావున సగటు పెరుగుదల **19.8%**గా చెప్పవచ్చును.

6.5 భారిత సూచీ సంఖ్యలు:

భారములు లేని సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో దత్తాంశంలోని అన్ని వస్తువుల సమాన ప్రాముఖ్యత ఉన్నట్లుగా భావిస్తాము. కాని వాస్తవముగా వస్తువుల ప్రాముఖ్యత వేరు వేరుగా ఉంటుంది.

ఉదా: మనము ఉపయోగించే వస్తువులలో ఆహారమునకు ఎక్కువ ప్రాముఖ్యత ఇస్తాము. కనుక భారములు లేని సూచీ సంఖ్యలు సరైన సమాచారమును అందించలేము. సూచీ సంఖ్యలు ఈ లోపమును సవరించటానికి దత్తాంశములోని ప్రతి వస్తువుకు సహేతుకమైన భారాలను నిర్ణయించి సూచీ సంఖ్యలను నిర్ణయించడానికి భారిత సూచీ సంఖ్యలు ఉపయోగిస్తారు. కావున దత్తాంశములోని అంశముల ప్రాముఖ్యతను బట్టి భారాలను నిర్ణయించి, నిర్ణయించబడే సూచీ సంఖ్యలనే భారిత సూచీ సంఖ్యలు అంటారు. భారిత సూచీ సంఖ్యలను రెండు రకాలుగా విభజించవచ్చును.

ఎ. భారిత సమిష్టి సూచీ సంఖ్యలు

బి. సాపేక్షికాల భారిత సగటు సూచీ సంఖ్యలు

6.5.1 భారిత సమిష్టి సూచీ సంఖ్యలు: ఈ పద్ధతిలో సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణమునకు వస్తువు ధరను ఉపయోగించిన పరిమాణమును పరిగణనలోనికి తీసుకుంటారు. వస్తు పరిమాణములను భారములుగా పరిగణిస్తారు. అయితే ఆధార సంవత్సర పరిమాణాలను లేక వర్తమాన సం॥ర పరిమాణాలను భారాలుగా తీసుకొనవచ్చును. వివిధ భారిత సమిష్టి పద్ధతులు ఏమనగా

1. లేస్పియర్ పద్ధతి
2. పాషే పద్ధతి
3. కెల్లీ పద్ధతి
4. మార్షల్ ఎడ్జ్‌వర్త్ సూచీ సంఖ్య
5. భౌలే సూచీ సంఖ్య
6. ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య

6.5.1. లేస్పియర్ పద్ధతి: ఈ పద్ధతిలో ఆధార సం॥లో వినియోగించిన పరిమాణమును భారాలుగా పరిగణిస్తారు.

సూత్రం $$P_{01} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

లేస్పియర్ పద్ధతి ప్రధాన ఉద్దేశ్యం ఏమనగా ఆధార సం॥లో కొనుగోలు చేసిన వస్తువులను అదే పరిమాణంలో ప్రస్తుత సం॥లో కొనుగోలు చేయాలంటే ఎంత ఖర్చు చేయవలసి వస్తుందని తెలుసుకొనవచ్చును. ఆచరణరీత్యా దీనిని ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తారు.

6.5.2. పాషే పద్ధతి : ఈ పద్ధతిలో వర్తమాన సం॥లో వినియోగించిన పరిమాణాలను భారాలుగా పరిగణిస్తారు.

$$\text{సూత్రం } P_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100$$

వర్తమాన సం॥లో కొనుగోలు చేస్తున్న వస్తువుల పరిమాణమునకు ఆధార సం॥లో అదే పరిమాణమునకు ఎంత ఖర్చు అవుతుంది తెలుసుకొనవచ్చును.

6.5.3. కెల్లీ పద్ధతి : ఈ పద్ధతిలో వర్తమాన, ఆధార సం॥ర పరిమాణాలను భారాలుగా పరిగణించరు. ప్రామాణిక పరిమాణాలను భారాలుగా తీసుకొని సూచీ సంఖ్యలను నిర్మిస్తారు. సాధారణంగా వర్తమానము, ఆధార సం॥ల పరిమాణములను సగటు చేసి తీసుకొంటారు.

$$\text{సూత్రం } P_{01} = \frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q}$$

$$q = \frac{q_0 + q_1}{2}$$

$\sum p_1 q$ = ప్రామాణిక పరిమాణమును వర్తమాన సం॥ ధరలచే హెచ్చించగా వచ్చు లబ్ధాల మొత్తం

$\sum p_0 q$ = ప్రామాణిక పరిమాణమును ఆధార సం॥ ధరలచే హెచ్చించగా వచ్చు లబ్ధాల మొత్తం

6.5.4. మార్షల్ ఎడ్జ్‌వర్త్ పద్ధతి : ఈ పద్ధతిలో కూడా సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణమునకు వర్తమాన, ఆధార సం॥లకు సంబంధించిన ధరలను, పరిమాణాలను పరిగణనలోనికి తీసుకొంటారు. ఈ పద్ధతి చాలా సులువైన పద్ధతి. వీటి ఫలితాలు సుమారుగా ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్య పద్ధతి ద్వారా పొందిన ఫలితాలతో పోలి ఉంటాయి. కనుక రెండు కాలాలలో ధరలలో మార్పును అధ్యయనం చేయడానికి ఈ పద్ధతి చాలా అనువైనదిగా చెప్పవచ్చు.

$$\text{సూత్రం } P_{01} = \frac{\sum p_1 q_0 + \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 + \sum p_0 q_1} \times 100$$

6.5.5. భౌలే పద్ధతి : ఇది లేస్పియర్, పాషే పద్ధతుల మిశ్రమముగా చెప్పవచ్చును. కనుక వర్తమాన, ఆధార సం॥లలో ఉపయోగించిన వస్తువుల పరిమాణములను, ధరలను పరిగణనలోనికి తీసుకొని సూచీ సంఖ్యలను నిర్మిస్తారు.

$$\text{సూత్రం } P_{01} = \frac{\dfrac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} + \dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}{2} \times 100$$

6.5.6. ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ పద్ధతి : ప్రొఫెసర్ ఇర్వింగ్ ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్య నిర్మాణమునకు అనేక సూత్రాలను రూపొందించినారు. వీటిలో ఒక సూత్రాన్ని మాత్రమే ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యగా పరిగణించాడు. అన్ని సూచీ సంఖ్యల కంటే ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్యనే ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యగా పరిగణించవచ్చును.

సూత్రము $$P_{01}=\sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}\times\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}}\times 100$$

ఇది మంచి సూచీ సంఖ్యగా పరిగణించడానికి దిగువ కారణాలు పేర్కొనవచ్చును.

ఎ. ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్య కాల పరివర్తన, కారకాల పరివర్తన పరీక్షలను సంతృప్తి పరుస్తుంది.

బి. వర్తమాన, ఆధార సం॥లకు సంబంధించిన పరిమాణాలను, ధరలను సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఉపయోగిస్తాము.

సి. సిద్ధాంతపరముగా గుణమధ్యమమును సరైన సగటుగా పరిగణిస్తారు. కాబట్టి గుణమధ్యమము పై ఆధారపడిన సూచీ సంఖ్య ఆదర్శమైనదిగా చెప్పవచ్చును.

డి. ఇది లేస్పియర్, పాషే పద్ధతిలోని లోపాలను సవరిస్తుంది.

సూత్రాల వివరణలు:

p_0 = ఆధార సంవత్సరపు ధరలు

p_1 = ప్రస్తుత సంవత్సరపు ధరలు

q_0 = ఆధార సంవత్సరపు పరిమాణము

q_1 = వర్తమాన సంవత్సరపు పరిమాణము

$\sum p_1q_0$ = ప్రస్తుత సంవత్సరపు ధరను ఆధార సంవత్సరపు పరిమాణముల చేత హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం.

$\sum p_0q_0$ = ఆధార సంవత్సరపు ధరను ఆధార సంవత్సరపు పరిమాణముల చేత హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం.

$\sum p_1q_1$ = ప్రస్తుత సంవత్సరపు ధరను ప్రస్తుత సంవత్సరపు పరిమాణముల చేత హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం.

$\sum p_0q_1$ = ఆధార సంవత్సరపు ధరను ప్రస్తుత సంవత్సరపు పరిమాణముల చేత హెచ్చించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం.

ఉదా(1): దిగువ దత్తాంశం నుండి ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను తయారు చేయండి.

వస్తువు	1995		1996	
	ధర	పరి	ధర	పరి
A	10	4	20	3
B	25	5	30	3
C	20	5	25	5
D	10	10	10	8

జవాబు:

వస్తువు	1995		1996		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
	ధర(p_0)	పరి(q_0)	ధర(p_1)	పరి(q_1)				
A	10	4	20	3	80	40	60	30
B	25	5	30	3	140	125	90	75
C	20	5	25	5	125	100	125	100
D	10	10	10	8	100	100	80	80
					$\sum p_1q_0$ 455	$\sum p_0q_0$ 365	$\sum p_1q_1$ 355	$\sum p_0q_1$ 285

$$p_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{455}{365} \times \frac{355}{285}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.246 \times 1.245} \times 100 = \sqrt{1.551} \times 100$$

$$= 1.245 \times 100 = 124.5$$

ఉదా(2): దిగువనీయబడిన వివరాలకు ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య, లేస్పియర్, పాషే, భౌలే సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించండి.

వస్తువు	1995		1996	
	ధర	పరి	ధర	పరి
A	4	6	2	8
B	6	5	5	10
C	5	10	4	14
D	2	13	2	19

జవాబు:

వస్తువు	1995		1996		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
	ధర(p_0)	పరి(q_0)	ధర(p_1)	పరి(q_1)				
A	4	6	2	8	12	24	16	32
B	6	5	5	10	25	30	50	60
C	5	10	4	14	40	50	56	70
D	2	13	2	19	26	26	38	38
					$\sum p_1q_0$ 103	$\sum p_0q_0$ 130	$\sum p_1q_1$ 160	$\sum p_0q_1$ 200

ఫిషర్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య $= \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$

$= \sqrt{\frac{103}{130} \times \frac{160}{200}} \times 100$

$= \sqrt{0.7923 \times 0.8} \times 100$

$= \sqrt{0.6336} \times 100$

$= 0.796 \times 100$

$= 79.6$

లేస్పియర్ సూచీ సంఖ్య $= \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$

$= \frac{103}{130} \times 100$

$= 0.7923 \times 100$

$= 79.23$

పాషే సూచీ సంఖ్య $= \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$

$= \frac{160}{200} \times 100$

$= 0.8 \times 100$

$= 80$

భౌలే సూచీ సంఖ్య $= \frac{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} + \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}}{2} \times 100$

$= \frac{\frac{103}{130} + \frac{160}{200}}{2} \times 100$

$= \frac{0.7923 + 0.8}{2} \times 100$

$= \frac{1.592}{2} \times 100$

$= 0.796 \times 100 = 79.6$

ఉదా(3): దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా లేస్పియర్, పాషే, భౌలే, మార్షల్ ఎడ్జ్‌వర్త్, ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యలను లెక్కించుము.

వస్తువు	1995		1996	
	ధర	ధర	పరి	పరి
W	20	40	8	6
X	50	60	10	5
Y	40	50	15	15
Z	10	20	20	25

వస్తువు	ధర		పరిమాణము		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
	1995(p_0)	1996(p_1)	1995(q_0)	1996(q_1)				
W	20	40	8	6	320	160	240	120
X	50	60	10	5	600	500	300	250
Y	40	50	15	15	750	600	750	600
Z	10	20	20	25	400	200	500	250
					$\sum p_1q_0$	$\sum p_0q_0$	$\sum p_1q_1$	$\sum p_0q_1$
					2070	1460	1790	1220

జవాబు:

ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య $= \sqrt{\dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_{0q}} \times \dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{2070}{1460} \times \frac{1790}{1220}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.417 \times 1.4672} \times 100$$

$$= \sqrt{2.0802} \times 100 \quad = 1.442 \times 100$$

$$= 144.2$$

భౌలే సూచీ సంఖ్య $= \dfrac{\dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} + \dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}}{2} \times 100$

$$= \frac{\frac{2070}{1462} + \frac{1790}{1220}}{2} \times 100$$

$$= \frac{1.4178 + 1.4672}{2} \times 100$$

$$= \frac{2.8850}{2} \times 100$$

$$= 1.4425 \times 100$$

$$= 144.25$$

లేస్పియర్ పద్ధతి $= \dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100$

$$= \frac{2070}{1462} \times 100$$

$$= 1.4178 \times 100$$

$$= 141.78$$

పాషే పద్ధతి $= \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100$

$= \frac{1790}{1220} \times 100$

$= 1.4672 \times 100$

$= 146.72$

మార్షల్ ఎడ్జ్‌వర్త్ సూచీ సంఖ్య $= \frac{\sum p_1 q_0 + \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 + \sum p_0 q_1} \times 100$

$= \frac{2070 + 1790}{1462 + 1220} \times 100$

$= \frac{3860}{2680} \times 100$

$= 1.440298 \times 100$

$= 144.02$

ఉదా(4): దిగువ దత్తాంశము ఆధారంగా ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను నిర్మించుము.

వస్తువు	ఆధార సంవత్సరము		వర్తమాన సంవత్సరము	
	ధర	విలువ	ధర	విలువ
A	10	40	12	60
B	20	120	25	150
C	30	240	32	320
D	5	400	10	300

జవాబు:

పై లెక్కలో వినియోగించిన పరిమాణం ఇవ్వనందున వాటిని దిగువ విధంగా లెక్కించాలి.

పరిమాణము $= \frac{\text{విలువ}}{\text{ధర}}$

ఆధార సం॥ర పరిమాణము $= \frac{40}{10} = 4$ వర్తమాన సం॥ర పరిమాణం $= \frac{60}{12} = 5$

$= \frac{120}{20} = 6$ $= \frac{150}{25} = 6$

$= \frac{240}{30} = 8$ $= \frac{320}{32} = 10$

$= \frac{400}{5} = 80$ $= \frac{300}{10} = 30$

వస్తువులు	ఆధార సంవత్సరము		ప్రస్తుత సంవత్సరం		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
	ధర(p_0)	పరి(q_0)	ధర(p_1)	పరి(q_1)				
A	10	4	12	5	48	40	60	50
B	20	6	25	6	150	120	150	120
C	30	8	32	10	256	240	320	300
D	5	80	10	10	800	400	300	150
					1254	800	830	620
					$\sum p_1q_0$	$\sum p_0q_0$	$\sum p_1q_1$	$\sum p_0q_1$

ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య $= \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{1254}{800} \times \frac{830}{620}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.5675 \times 1.3387} \times 100 = \sqrt{2.098} \times 100$$

$$= 1.449 \times 100 = 144.9$$

ఉదా(5): దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్, మార్షల్ ఎడ్జ్‌వర్త్, కెల్లీ సూచీ సంఖ్యల ప్రకారం భారిత సూచీ సంఖ్యలను గణన చేయండి.

వస్తువు	ఆధార సంవత్సరం		వర్తమాన సంవత్సరం	
	పరిమాణం	మొత్తం	పరిమాణం	మొత్తం
A	20	40	45	180
B	24	96	30	150
C	30	180	40	320
D	40	320	60	600

జవాబు:

లెక్కలో ధరలు ఇవ్వనందున వాటిని క్రింది విధముగా లెక్కించాలి.

$$\text{ధర} = \frac{\text{మొత్తం}}{\text{పరిమాణము}}$$

ఆధార సంవత్సరపు ధరలు   వర్తమాన సంవత్సరపు ధరలు

$$\frac{40}{20} = 2 \qquad \frac{180}{45} = 4$$

$$\frac{96}{24} = 4 \qquad \frac{150}{30} = 5$$

$$\frac{180}{30} = 6 \qquad \frac{320}{40} = 8$$

$$\frac{320}{40} = 8 \qquad \frac{600}{60} = 10$$

వస్తువు	ఆధార సం॥		వర్తమాన సం॥								
	ధర(p_0)	పరి(q_0)	ధర(p_1)	పరి(q_1)	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1	$\frac{q_1+q_0}{2}=q$	p_1q	p_0q
A	2	20	4	45	80	40	180	90	325	130	65
B	4	24	5	30	120	96	150	120	27	135	108
C	6	30	8	40	240	180	320	240	35	280	210
D	8	40	10	60	400	320	600	480	50	500	400
					840	636	1250	930		1045	783
					$\sum p_1q_0$	$\sum p_0q_0$	$\sum p_1q_1$	$\sum p_0q_1$		$\sum p_1q$	$\sum p_0q$

ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్య $= \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{840}{636} \times \frac{1250}{930}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.32 \times 1.34} \times 100$$

మార్షల్ ఎడ్జ్‌వర్త్ సూచీ సంఖ్య $= \frac{\sum p_1q_0 + \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 + \sum p_0q_1} \times 100$

$$= \frac{840 + 1250}{636 + 930} \times 100$$

$$= \frac{2090}{1566} \times 100$$

$= \sqrt{1.7688} \times 100$ $=1.3346 \times 100$

$= 1.33 \times 100$ $= 133.46$

$=133$

కెల్లీ సూచీ సంఖ్య $= \dfrac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q} \times 100 = \dfrac{1045}{783} \times 100 = 1.3346 \times 100 = 133.46$

ఉదా(6): దిగువ వివరాలకు సామాన్య సమిష్టి పద్ధతి ద్వారా ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూత్రం ద్వారా సూచీ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

వస్తువులు	ఆధార సంవత్సరము(1995)		వర్తమాన సంవత్సరము(1996)	
	ధర	ఖర్చు	ధర	ఖర్చు
1	2	40	5	75
2	4	16	8	40
3	1	10	2	24
4	5	25	10	60

జవాబు:

లెక్కలో పరిమాణములు ఇవ్వనందున ఖర్చును ధరతో భాగించాలి.

వస్తువులు	ఆధార సంవత్సరము			వర్తమాన సంవత్సరము						
	ధర (p_0)	పరి (q_0) = ఖర్చు/ధర		ధర (p_1)	పరి (q_1) = ఖర్చు/ధర		p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
1	2	40/2	20	5	75/5	15	100	40	75	30
2	4	16/4	4	8	40/8	5	32	60	40	20
3	1	10/1	10	2	24/2	12	20	10	24	12
4	5	25/5	5	10	60/10	6	50	25	60	30
	$\sum p_0 = 12$			$\sum p_1 = 25$			202	91	199	92
							$\sum p_1q_0$	$\sum p_0q_0$	$\sum p_1q_1$	$\sum p_0q_1$

సామాన్య సమిష్టి పద్ధతిన సూచీ సంఖ్య $= \dfrac{\sum p_1}{\sum p_0} \times 100$

$$= \frac{25}{12} \times 100$$

$$= 2.083 \times 100$$

$$= 208.3$$

ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య $= \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{202}{91} \times \frac{199}{92}} \times 100$$

$$= \sqrt{2.222 \times 2.16} \times 100$$

$$= \sqrt{4.7952} \times 100$$

$$= 2.19 \times 100$$

$$= 219$$

ఉదా(7): క్రింది వివరాల ఆధారంగా ఫిషర్స్, భౌలే, మార్షల్ ఎడ్జ్‌వర్త్ సూత్రాల ఆధారంగా భారిత సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించండి.

వస్తువులు	పరిమాణము		విలువ	
	1995	1996	1995	1996
A	100	150	500	900
B	80	100	320	500
C	60	72	150	360
D	30	33	360	297

జవాబు:

పై లెక్కలో వస్తువుల ధర ఇవ్వనందున విలువను పరిమాణంతో భాగించి ధరలను లెక్కించాలి

వస్తువు	1995			1996						
	ధర $= \frac{\text{విలువ}}{\text{పరి}}$	(p_0)	పరి (q_0)	ధర $= \frac{\text{విలువ}}{\text{పరి}}$	(p_1)	పరి (q_1)	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	500 ÷ 100 =	5	100	900 ÷ 150 =	6	150	600	500	900	750
B	320 ÷ 80 =	4	80	500 ÷ 100 =	5	100	400	320	500	400
C	150 ÷ 60 =	2.5	60	360 ÷ 72 =	5	72	300	150	360	180
D	360 ÷ 30 =	12	30	297 ÷ 33 =	9	33	270	360	297	396
							1570	1330	2057	1726
							$\sum p_1q_0$	$\sum p_0q_0$	$\sum p_1q_1$	$\sum p_0q_1$

ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య $= \sqrt{\dfrac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}} \times 100$

$= \sqrt{\dfrac{1570}{1330} \times \dfrac{2057}{1726}} \times 100$

$= \sqrt{1.18 \times 1.19} \times 100$

$= \sqrt{1.4042} \times 100$

$= 1.185 \times 100$

$= 118.5$

భౌలే సూచీ సంఖ్య $= \dfrac{\dfrac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} + \dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}}{2} \times 100$

$= \dfrac{\dfrac{1570}{1330} + \dfrac{2057}{1726}}{2} \times 100$

$= \dfrac{1.18 + 1.19}{2} \times 100$

$= \dfrac{2.37}{2} \times 100 = 1.185 \times 100$

$= 118.5$

మార్షల్ ఎడ్జ్‌వర్త్ సూచీ సంఖ్య $= \dfrac{\sum p_1 q_0 + \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 + \sum p_0 q_1} \times 100$

$= \dfrac{1570 + 2057}{1330 + 1726} \times 100$

$= \dfrac{3627}{3056} \times 100$

$= 1.1868 \times 100$

$= 118.68$

6.5.2. సాపేక్షికాల భారిత సగటు పద్ధతి: భారిత సమిష్టి సూచీ సంఖ్యల లెక్కింపులో ధరల సాపేక్షికాలను గణన చేయలేము. అయితే ధరల సాపేక్షికాల ఆధారంగా కూడా సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించవచ్చును. ఇందుకు ఉపయోగించే గణాంక పద్ధతినే సాపేక్షికాల భారిత సగటు అనీ, కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతి అని కూడా వ్యవహరిస్తారు. ఈ పద్ధతి ప్రకారం ధరల సాపేక్షికాలను, భారాలను పరిగణనలోనికి తీసుకొని సూచీ సంఖ్యలు నిర్మిస్తారు. సాపేక్షికాల భారిత సగటు సూచీ నిర్మించడానికి అంకమధ్యమము లేక గుణమధ్యమమును ఉపయోగిస్తారు.

అంకమధ్యమము ద్వారా సూచీ గణన: అంకమధ్యమము ద్వారా సూచీ సంఖ్యను గణన చేయడానికి దిగువ క్రమమును పాటించాలి.

ఎ. ధరల సాపేక్షిక విలువలను గణన చేయాలి. (వర్తమాన సం॥ ధరను ఆధార సం॥ ధరతో భాగించి వచ్చే విలువను 100తో గుణించాలి.)

బి. వస్తువుల ప్రాధాన్యతను బట్టి భారాలు ఇవ్వనట్లయితే ఆధార సం॥ర ధరను ఆ సం॥ర పరిమాణంతో గుణించి, ఆ వస్తువు భారాన్ని కనుగొనవలెను.

సి. ధరల సాపేక్షికాలను భారాలతో హెచ్చించాలి $\left[\sum IV\right]$

డి. భారాల మొత్తమును కనుగొనాలి $\left(\sum V\right)$

ఇ. సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించడానికి దిగువ సూత్రమును ఉపయోగించాలి.

$$\text{సూత్రం} = \frac{\sum IV}{\sum V}$$

గుణమధ్యమము ద్వారా సూచీ గణన: కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతిలో గుణమధ్యమమును ఉపయోగించి సూచీ సంఖ్యను క్రింది విధంగా కనుగొనవచ్చును.

$$\text{సూత్రం} = Anti \log of \; \frac{\sum I \log x V}{\sum V}$$

ఎ. దత్తాంశంలోని ప్రతి అంశము యొక్క సాపేక్షిక విలువను కనుగొనాలి $\left[I = \frac{P_1}{P_0} \times 100\right]$

బి. భారాలు ఇవ్వనపుడు p_0ను q_0తో గుణించి నిర్ణయించాలి $\left[V = p_0 q_0\right]$

సి. సాపేక్షిక విలువలకు సంవర్గమానములు చూడవలె $\left[\log x\right]$

డి. $\log x$ ను సంబంధిత భారాలచే హెచ్చించవలయును $\left[V \log x\right]$

ఇ. భారాల మొత్తంను కూడాలి $\left[\sum V\right]$

ఉదా(1): దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతిన సూచీ సంఖ్యలను లెక్కించుము.

ఖర్చులు	ఆహారము	అద్దె	దుస్తులు	ఇంధనము	ఇతరాలు
	40%	10%	20%	15%	15%
95లో ధరలు	80	20	80	10	50
97లో ధరలు	100	30	90	20	60

భారిత అంక మధ్యమమును ఉపయోగిస్తూ సూచీ సంఖ్యను నిర్మించుము.

జవాబు:

ఖర్చులు	భారాలు (V)	1995లో ధరలు (P_0)	1997లో ధరలు (P_1)	$I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	IV
ఆహారము	40	80	100	125	5,000
అద్దె	10	20	30	150	1,500
దుస్తులు	20	80	90	113.5	2,250
ఇంధనము	15	10	20	200	3,000
ఇతరాలు	15	50	60	120	1,800
	$\sum V = 100$				$\sum IV = 13,550$

కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతి ద్వారా అంకమధ్యమమున సూచీ = $\frac{\sum IV}{\sum V}$

$$= \frac{13550}{100} = 135.5$$

ఉదా : 2 దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ధర సూచీలను భారిత సగటు పద్ధతిన లెక్కింపుము.

	ఆధార సంవత్సరము		వర్తమాన సంవత్సరము	
వస్తువు	ధర	పరి	ధర	పరి
A	8	90	10	130
B	10	100	12	120
C	20	150	25	30
D	12	60	15	80

జవాబు: అంకమధ్యమమును ఉపయోగించి ధర సాపేక్షికాల భారిత సగటు సూచీ

	ఆధార సంవత్సరము		వర్తమాన సంవత్సరము				
వస్తువు	ధర	పరి	ధర	పరి	$I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	$V = P_0 Q_0$	IV
A	8	90	10	130	125	720	90,000
B	10	100	12	120	120	1000	1,20,000
C	20	150	25	30	125	3,000	3,75,000
D	12	60	15	80	125	720	90,000
						$\sum V = 5,440$	$\sum IV = 6,75,000$

$$\text{సూచీ సంఖ్య} = \frac{\sum IV}{V}$$

$$= \frac{6,75,000}{5,440} = 124.08$$

ఉదా(3): దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ధర సూచీలను లెక్కించుము.

వస్తువు	సూచీ సంఖ్య	భారాలు
ఆహారము	350	50
ఇంధనము	200	20
దుస్తులు	240	10
ఇంటి అద్దె	180	15
ఇతరాలు	200	20

జవాబు:

వస్తువు	సూచీ సంఖ్య	భారాలు (V)	IV
ఆహారము	350	50	17,500
ఇంధనము	200	20	4,000
దుస్తులు	240	10	2,400
ఇంటి అద్దె	180	15	2,700
ఇతరాలు	200	20	4,000
		$\sum V = 115$	$\sum IV = 30,600$

$$\text{సూచీ సంఖ్య} = \frac{\sum IV}{\sum V}$$

$$= \frac{30,600}{115} = 266.1$$

ఉదా(4): దిగువ వివరాల ఆధారంగా గుణమధ్యమును ఉపయోగించి ధర సాపేక్షికాల భారిత సగటు పద్ధతి ద్వారా సూచీని లెక్కించుము.

	ఆధార సంవత్సరము(1995)		వర్తమాన సంవత్సరము (1996)
వస్తువు	ధర	పరి	ధర
పంచదార	3	30	4
బియ్యం	4	50	5
గోధుమ	3	40	4
జొన్న	2	20	3
పప్పు	5	10	8

జవాబు:

	1995		1996				
వస్తువు	ధర (P_0)	పరి (Q_0)	ధర (P_1)	$V = P_0 Q_0$	$I = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	$I \log x$	$I \log xv$
పంచదార	3	30	4	90	133.33	2.1249	191.241
బియ్యం	4	50	5	200	125	2.0969	419.380
గోధుమ	3	40	4	120	133.33	2.1249	254.989
జొన్న	2	20	3	40	150	2.1761	82.044
పప్పు	5	10	8	50	160	2.2041	110.205
							1,062.858
				$\sum V = 500$			$\sum I \log x V$

సూచీ సంఖ్య = $\text{Antilog of } \frac{\sum I \log x V}{V}$

$$= \text{Antilog of } \frac{1,062.858}{500} = \text{Anti log of } 2.1257 = 133.6$$

6.6 పరిమాణము లేక విలువ సూచీ సంఖ్యలు :

కొన్ని వస్తువుల ధరలలో మార్పులను ధరల సూచీలు కొలుస్తాయి. మరొక విధంగా చెప్పాలంటే సూచీల పరిమాణము లేక విలువలలోని మార్పులను కూడా కొలుస్తారు. తయారయ్యే వస్తువుల భౌతిక విలువలలో మార్పును కూడా కొలుస్తారు. వస్తువుల తయారి, పంపిణీ వినియోగంలోని వస్తువుల మార్పులను కూడా అంచనా వేస్తారు, కొలుస్తారు. ఈ సూచీలు ఆర్థిక వ్యవస్థలోని

ఉత్పత్తి పద్ధతులను గురించి ఎప్పటికప్పుడు తెలియజేస్తాయి. పరిమాణ సూచీని నిర్మించేటప్పుడు ధరలను భారాలుగా లెక్కిస్తాము. ఇది చాలా సులువుగా సంపాదించవచ్చును. p నుంచి q కు మరియు q నుంచి p కు మార్పు చేసి పరిమాణ సూచీలను పొందవచ్చును. ఈ పరిమాణ సూచీలు క్రింది విధంగా ఉంటాయి.

1. లేస్పియర్ సూచీ = $q_{01}\ \dfrac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}\times 100$

2. పాషే పద్ధతి = $q_{01}\ \dfrac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0}\times 100$

3. భౌలే పద్ధతి = $q_{01}\ \dfrac{\dfrac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}\times\dfrac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0}}{2}\times 100$

4. మార్షల్ ఎడ్జ్‌వర్త్ పద్ధతి = $q_{01}\ \dfrac{\sum q_1 p_0 + \sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0 + \sum q_0 p_1}\times 100$

5. ఫిషర్స్ ఆధార సూచీ సంఖ్య = $Q_{01} = \sqrt{\dfrac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}\times\dfrac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}}\times 100$

ఉదా(1) : దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా పరిమాణాత్మక సూచీ సంఖ్యలను లేస్పియర్, పాషే, భౌలే, ఫిషర్స్, మార్షల్ ఎడ్జ్‌వర్త్ పద్ధతిన లెక్కించుము.

	1995		1996	
వస్తువు	ధర	పరి	ధర	పరి
A	4	4	5	50
B	3	80	4	100
C	5	50	8	80
D	8	40	10	50
E	10	30	12	40

జవాబు:

	1995		1996					
వస్తువు	ధర (p_0)	పరి (q_0)	ధర (p_0)	పరి (q_0)	$q_1 p_0$	$q_0 p_0$	$q_1 p_1$	$q_0 p_1$
A	4	4	5	50	200	160	250	200
B	3	80	4	100	300	240	400	320
C	5	50	8	80	400	250	640	400
D	8	40	10	50	400	320	500	400
E	10	30	12	40	400	300	480	360
					1700	1270	2270	1680
					$\sum q_1 p_0$	$\sum q_0 p_0$	$\sum q_1 p_1$	$\sum q_0 p_1$

ఫిషర్స్ పరిమాణాత్మక సూచీ సంఖ్య : $$q_{01} = \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}} \times 100$$

$$q_{01} = \sqrt{\frac{1700}{1270} \times \frac{2270}{1680}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.338 \times 1.351} \times 100$$

$$= \sqrt{1.807638} \times 100$$

$$1.3445 \times 100 = 134.45$$

భౌలే పద్ధతి = $$q_{01} = \frac{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} + \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}}{2} \times 100$$

$$= \frac{\frac{1700}{1270} + \frac{2270}{1680}}{2} \times 100$$

$$= \frac{1.338 + 1.351}{2} \times 100$$

మార్షల్ ఎడ్జ్‌వర్త్ పద్ధతి = $$\frac{\sum q_1 p_0 + \sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0 + \sum q_0 p_1} \times 100$$

$$= \frac{1700 + 2270}{1270 + 1680} \times 100$$

$$= \frac{3970}{2960} \times 100$$

$=\frac{2.689}{2}\times 100$ $=1.3457\times 100$

$=1.3445\times 100=134.45$ $=134.57$

లేస్పియర్ పద్ధతి $= q_{01}=\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}\times 100$ పాషే పద్ధతి $=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}\times 100$

$=\frac{1700}{1270}\times 100$ $=\frac{2270}{1680}\times 100$

$=1.338\times 100$ $=1.351\times 100$

$=133.8$ $=135.1$

6.7 అభ్యాసము :

1. సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఎదురయ్యే సమస్యలను వివరంగా పేర్కొనండి.
2. సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణ పద్ధతిని గూర్చి సవివరంగా తెలపండి.

సామాన్య సమిష్టి పద్ధతి - సామాన్య సగటు పద్ధతిన లెక్కలు

3. దిగువ దత్తాంశము ఆధారంగా సామాన్య సమిష్టి పద్ధతిన, సామాన్య సగటు పద్ధతిన సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించుము.

వస్తువులు	:	A	B	C	D	E
1995 ధరలు	:	50	60	10	50	25
1996 ధరలు	:	75	60	12	18	35

(జవాబు: 125, 126)

4. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా సామాన్య సమిష్టి పద్ధతి, సాపేక్షికాల సగటు పద్ధతిన సూచీ సంఖ్యలు లెక్కించుము.

వస్తువులు	:	A	B	C	D	E	F
1995లో ధరలో	:	40	60	70	20	50	100
1996లో ధరలో	:	50	70	90	30	80	110

(జవాబు: 123.53, 129.33)

5. దిగువ దత్తాంశమునకు సామాన్య సమిష్టి పద్ధతి ద్వారా సూచీ సంఖ్యలను లెక్కించుము.

వస్తువులు	:	A	B	C	D
1995 ధరలు	:	162	256	257	132
1996 ధరలు	:	171	164	189	145

(జవాబు: 82.9)

6. దిగువ దత్తాంశమునకు సామాన్య సమిష్టి పద్ధతిన సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించుము.

వస్తువులు	:	ఇటుకలు	కలప	ఇతరములు	ఇసుక	సిమెంటు
1995 ధరలు	:	10	20	4	5	10
1996 ధరలు	:	15	25	6	8	15

(జవాబు: 140.82)

7. సమిష్టి, సాపేక్షికాల సామాన్య సగటు పద్ధతిన సూచీలను నిర్మించండి.

వస్తువులు	:	A	B	C	D	E
1995 ధరలు	:	50	80	105	120	5
1996 ధరలు	:	60	120	100	160	10

(జవాబు: 125, 139.7)

అంకమధ్యమము, సగటు మధ్యమము ద్వారా సూచీ సంఖ్యలు

8. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా అంకమధ్యమము, గుణమధ్యమము ద్వారా సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించుము.

వస్తువులు	:	A	B	C	D	E
1995 ధరలు	:	20	30	40	50	10
1996 ధరలు	:	30	60	60	80	30

(జవాబు: 192)

9. గుణమధ్యమము ద్వారా ధరల సూచీని లెక్కించుము.

వస్తువులు	:	A	B	C	D	E	F
1995 ధరలు	:	25	50	10	40	80	120
1996 ధరలు	:	45	60	20	80	100	150

(జవాబు: 154.3)

10. దిగువ దత్తాంశమునకు అంకమధ్యమము, గుణమధ్యమము ద్వారా సూచీలను లెక్కించుము.

వస్తువులు	:	A	B	C	D	E
1995 ధరలు	:	5	12	2	10	6
1997 ధరలు	:	5	8	4	15	8

11. దిగువ దత్తాంశమునకు అంకమధ్యమము, గుణమధ్యమమును ఉపయోగిస్తూ సూచీ సంఖ్యను నిర్మించండి.

వర్గము	1991	1992	1993	1994
A	8	12	16	20
B	32	40	41	60
C	16	20	32	40

భారిత సమిష్టి సూచీ సంఖ్యలు

12. దిగువ దత్తాంశము ఆధారముగా ఫిషర్స్, మార్షల్ ఎడ్జ్‌వర్త్, భౌలే పద్ధతిన సూచీ సంఖ్యలను లెక్కించుము.

వస్తువులు	1995		1996	
	ధర	పరి	ధర	పరి
A	3	70	4	80
B	6	130	5	150
C	8	50	10	40
D	5	40	8	50
E	4	30	7	60
F	7	100	10	120

13.దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించుము.

వస్తువులు	ఆధార సం॥		వర్తమాన సం॥	
	ధర	పరి	ధర	పరి
A	6	50	10	60
B	2	100	2	120
C	4	60	2	60
D	10	30	12	30
E	15	60	20	60

(జవాబు: 122.71)

14.దిగువ దత్తాంశంనకు లేస్పియర్, పాషే, భౌలే, ఫిషర్స్, మార్షల్ ఎడ్జ్‌వర్త్ సూచీలను నిర్మించుము.

వస్తువులు	ఆధార సం॥		వర్తమాన సం॥	
	ధర	పరి	ధర	పరి
A	2	20	3	40
B	5	40	6	80
C	4	80	8	100
D	8	90	10	120
E	10	20	12	40

(జ: 140.54, 137.5, 139.02, 139.02, 138.71)

15. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా అన్ని పద్ధతులలో సూచీ సంఖ్యలు లెక్కించుము.

అంశము	ఆధార సం॥		వర్తమాన సం॥	
	ధర	పరి	ధర	పరి
A	6	50	10	56
B	2	100	2	120
C	4	60	6	60
D	10	30	12	24
E	8	40	12	36

(జ: 139.71, 139.88, 140, 140, 139.8)

16.దిగువ దత్తాంశమునకు లేస్పియర్, పాషే, ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్యలను లెక్కించుము.

	ధరలు		పరిమాణము	
వస్తువులు	1995	1996	1995	1996
A	5	5	15	5
B	7	4	5	3
C	8	6	6	10
D	3	3	8	4

(జవాబు : 85.17, 86.23, 85.5)

17.దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించుము.

	పరిమాణము		ధరలు	
వస్తువులు	1995	1996	1995	1996
A	12	15	10	12
B	15	20	7	5
C	24	20	5	9
D	5	5	16	14

(జవాబు : 115.76)

18. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించుము.

	ఆధార సం॥		వర్తమాన సం॥	
వస్తువు	ధర	మొత్తం విలువ	ధర	మొత్తం విలువ
A	8	80	10	110
B	10	90	12	108
C	16	256	20	340

19. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించుము.

	ఆధార సం॥		వర్తమాన సం॥	
వస్తువులు	ధర	ఖర్చు	ధర	ఖర్చు
A	10	120	12	144
B	5	40	6	54
C	20	60	25	100
D	8	80	8	72

(జవాబు : 116.49)

20. ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించుము.

	1995		1996	
వస్తువు	ధర	విలువ	ధర	విలువ
A_1	4	40	5	50
A_2	3	21	3	24
A_3	6	48	8	40
A_4	5	30	4	32
A_5	8	64	10	60

(జవాబు : 115.33)

21. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించుము.

వస్తువు	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_0	p_1q_1
A	10	30	14	25
B	6	50	8	60
C	4	60	6	45
D	2	100	4	125

(జవాబు : 152.8)

22. దిగువ దత్తాంశము ఆధారంగా ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించుము.

	ధర		పరిమాణము	
వస్తువులు	1995	1996	1995	1996
A	6	8	10	12
B	7	10	5	8
C	5	7	8	10
D	15	20	12	15
E	20	25	15	10

(జవాబు : 127.05)

23. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించుము.

$\sum p_1q_0 = 122$ $\sum p_1q_1 = 217$

$\sum p_0q_0 = 184$ $\sum p_0q_1 = 190$

(జవాబు : 114.71)

24. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా కెల్లీ సూచీ సంఖ్యను, ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించుము.

	ఆధార సం॥		వర్తమాన సం॥	
వస్తువులు	ధర	పరి	ధర	పరి
A	2	20	4	45
B	4	24	5	30
C	6	30	8	40
D	8	40	10	60

25. కెల్లీ, ఫిషర్స్, లేస్పియర్, పాషే సూచీ సంఖ్యలను లెక్కించుము.

	ఆధారసం॥		వర్తమాన సం॥	
వస్తువులు	ధర	పరి	ధర	పరి
A	8	50	20	60
B	2	15	6	10
C	1	20	2	8
D	2	10	5	1
E	1	40	3	3

సాపేక్షికాల భారిత సగటు పద్ధతి

26. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా భారిత సాపేక్షికాల సగటు పద్ధతిన సూచీ సంఖ్యలను లెక్కించుము.

అంశము	యూనిట్	పరిమాణము	1995 ధర	1996 ధర
సిమెంట్	100 పౌండ్లు	50 పౌండ్లు	5	8
కలప	చ.అ.	2000 చ.అ.	9.50	1420
ఇనుము	చ.అ.	50 చ.అ.	34	42
ఇటుకలు	1000కి	20,000	12	24

27. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా 1995, 1996 సం॥లకు 1990 సం॥ను ఆధారముగా తీసుకొని భారిత సాపేక్షికాల పద్ధతిన సూచీ సంఖ్యలు లెక్కించుము.

వస్తువు	1990 ధర	1995 ధర	1996 ధర	భారాలు
A	20	24	21	4
B	1.25	1.5	1	3
C	5	8	8	2
D	2	2.25	2.12	1

పరిమాణాత్మక సూచీ సంఖ్యలు

28. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా లేస్పియర్, పాషే, భౌలే, ఫిషర్స్ ఆదర్శ పరిమాణాత్మక సూచీ సంఖ్యలను తయారు చేయుము.

	1990		1996	
వస్తువు	ధర	పరి	ధర	పరి
A	2	5	4	4
B	3	4	6	3
C	1	8	2	7
D	4	5	8	4

29. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా పరిమాణాత్మక సూచీ సంఖ్యలను ఫిషర్స్, లేస్పియర్, పాషే, భౌలే పద్ధతిన లెక్కించుము.

	ధరలు		పరిమాణములు	
వస్తువులు	1995	1996	1995	1996
A	9.2	15	5	5
B	8	12	10	11
C	4	5	6	6
D	1	1.25	4	8

రచయిత

శ్రీ కె. ఉపాధ్యాయ

పాఠం 7 సూచీ సంఖ్యల సూత్రాల పరిపూర్ణత్వపు పరీక్షలు

ఉద్దేశ్యము:

ఈ పాఠ్యాంశాన్ని అధ్యయనం చేయడం వలన మీరు :-

* వివిధ సూచీ సంఖ్యల సూత్రాల పరిపూర్ణత్వాన్ని వివరించడము
* గొలుసు సూచీలు, ఆధార సంవత్సరమును మార్చడము, జతపరచడము మొదలైనవి తెలుసుకుంటారు

పాఠ్య నిర్మాణక్రమం

7.1 పరిచయము

7.2 సూచీ సంఖ్యల సూత్రాల పరీక్షలు

7.2.1 కాల పరివర్తన పరీక్ష

7.2.2 అంశ పరివర్తన పరీక్ష లేక కారకాల పరివర్తన పరీక్ష

7.2.3 యూనిట్ పరీక్ష

7.2.4 చక్రీయ పరీక్ష

7.3 గొలుసు సూచీ సంఖ్యలు

7.3.1 స్థిర ఆధార పద్ధతి, గొలుసు ఆధార సూచీ

7.3.2 గొలుసు సూచీ, స్థిర ఆధారాల సూచీల మార్పిడి

7.3.3 స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను గొలుసు సూచీలుగా మార్చుట

7.3.4 సూచీ సంఖ్యలను జతపరచడం

7.4 అభ్యాసాలు

7.1 పరిచయము:

సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణానికి అనేక సూత్రాలు ఉపయోగిస్తున్నారు. ఎంపిక చేసిన సూత్రము దత్తాంశమునకు సముచితమైనది, లేనిది నిర్ణయించాల్సి యుంటుంది. దిగువ తెలిపిన పరీక్షలను సంతృప్తిపరచినట్లయితే ఆ సూత్రము పరిపూర్ణమయినది అని, సంతృప్తి పరచకపోతే ఆ సూత్రము అసంపూర్ణమయినదని పరిగణిస్తారు.

7.2 సూచీ సంఖ్యల సూత్రాల పరీక్షలు:

7.2.1. కాల పరివర్తన పరీక్షలు : మంచి సూచీ సంఖ్య అనునది కాల పరివర్తన పరీక్షను సంతృప్తి పరచాలి. దీనిని ఇర్వింగ్ ఫిషర్ కనుగొన్నాడు. ఈ సూత్రాలు కాలములో ముందుకు, వెనుకకు పని చేస్తున్నది, లేనిది నిర్ధారణ చేయడానికి ఈ పరీక్ష ఉపయోగ పడుతుంది. "ఫిషర్ ప్రకారం" " ఆధార సంవత్సరం మీద ఆధారపడిన వర్తమాన సంవత్సరపు సూచీ సంఖ్య, వర్తమాన సంవత్సరం మీద ఆధారపడిన ఆధార సంవత్సరపు సూచీ సంఖ్యకు వ్యుత్క్రమంగా ఉంటుంది. "

కాల పరివర్తన పరీక్ష $= P_{01} \times P_{10} = 1$

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}} \qquad , \quad P_{10} = \sqrt{\frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_1 q_0} \times \frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_1 q_1}}$$

$$T.R.T = \sqrt{\frac{\cancel{\sum p_1 q_0}}{\cancel{\sum p_0 q_0}} \times \frac{\cancel{\sum p_1 q_1}}{\cancel{\sum p_0 q_1}} \times \frac{\cancel{\sum p_0 q_0}}{\cancel{\sum p_1 q_0}} \times \frac{\cancel{\sum p_0 q_1}}{\cancel{\sum p_1 q_1}}} = \sqrt{1} = 1$$

7.2.2. కారకాల పరివర్తన పరీక్ష లేక అంశ పరివర్తన పరీక్ష: దీని ప్రకారం ధరలోని మార్పు పరిమాణంలో మార్పుతో గుణించగా వచ్చిన మొత్తం విలువలోని మార్పుకు సమానంగా ఉండాలి.

సూత్రం $= p_{01} \times q_{01} = \dfrac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$

$$p_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}} \quad , \; q_{01} = \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}}$$

$$F.R.T. = \sqrt{\frac{\sum \cancel{p_1 q_0}}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum \cancel{p_0 q_1}} \times \frac{\sum \cancel{q_1 p_0}}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum \cancel{q_0 p_1}}} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

7.2.3. యూనిట్ పరీక్ష: సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించుటలో ఉపయోగించే సూత్రాలు ధరలను కొలిచిన యూనిట్లను బట్టి మారకూడదు. సామాన్య సమిష్టి పద్ధతి ప్రకారం నిర్మించిన సూచీ సంఖ్య తప్ప మిగిలిన అన్ని పద్ధతులు ఈ పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తాయి.

7.2.4. చక్రీయ పరీక్ష: చక్రీయ పరీక్ష రెండు కంటే ఎక్కువ కాలాలకు విస్తరింపజేసే కాల పరివర్తన పరీక్షగా చెప్పవచ్చును. దీని ప్రకారం సన్నిహిత సంబంధం కలిగియున్న విషయములకు సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించినపుడు విరుద్ధమైన ఫలితాలు రాకూడదు. ఉదాహరణకు 3 కాలాలకు సంబంధించిన దత్తాంశమును తీసుకొనినపుడు ఆ సూచీల మధ్య సంబంధం దిగువ విధంగా ఉండాలి.

చక్రీయ పరీక్ష $= P_{01} \times P_{12} \times P_{20} = 1$ లేదా

$$\frac{\sum p_1}{\sum p_0} \times \frac{\sum p_2}{\sum p_1} \times \frac{\sum p_0}{\sum p_2} = 1$$ లేదా

$$\frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q} \times \frac{\sum p_2 q}{\sum p_1 q} \times \frac{\sum p_0 q}{\sum p_2 q} = 1$$

ఉదా (1): **దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించి అది పరీక్షలను సంతృప్తి పరుస్తుంది, లేనిది నిరూపించండి.**

అంశము	ఆధార సంవత్సరము		వర్తమాన సంవత్సరము	
	ధర	ఖర్చు	ధర	ఖర్చు
P	6	300	10	560
Q	2	200	2	240
R	4	240	6	360
S	10	300	12	288
T	3	120	8	240

జవాబు: లెక్కలో వస్తు పరిమాణము ఇవ్వనందున ఖర్చును ధరతో భాగించి పరిమాణమును కనుగొనాలి.

ఆధార సంవత్సర పరిమాణము $= \frac{\text{ఖర్చు}}{\text{ధర}}$	వర్తమాన సంవత్సర పరిమాణము $= \frac{\text{ఖర్చు}}{\text{ధర}}$
$\frac{300}{6} = 50$	$\frac{560}{10} = 56$
$\frac{200}{2} = 100$	$\frac{240}{2} = 120$
$\frac{240}{4} = 60$	$\frac{360}{6} = 60$
$\frac{300}{10} = 30$	$\frac{288}{12} = 24$
$\frac{120}{3} = 40$	$\frac{240}{8} = 30$

అంశాలు	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
P	6	50	10	56	500	300	560	336
Q	2	100	2	120	200	200	240	240
R	4	60	6	60	360	240	360	240
S	10	30	12	24	360	300	288	240
T	3	40	8	30	320	120	240	90
					1740	1160	1688	1146

ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య $= \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{1740}{1160} \times \frac{1688}{1146}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.5 \times 1.47} \times 100 = \sqrt{2.205} \times 100$$

$$= 1.4849 \times 100 = 148.5$$

కాల పరివర్తన పరీక్ష $= \sqrt{\frac{\sum \cancel{p_1q_0}}{\sum \cancel{p_0q_0}} \times \frac{\sum \cancel{p_1q_1}}{\sum \cancel{p_0q_1}} \times \frac{\sum \cancel{p_0q_0}}{\sum \cancel{p_1q_0}} \times \frac{\sum \cancel{p_0q_1}}{\sum \cancel{p_1q_1}}} = \sqrt{1} = 1$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{1740}}{\cancel{1160}} \times \frac{\cancel{1688}}{\cancel{1146}} \times \frac{\cancel{1160}}{\cancel{1740}} \times \frac{\cancel{1146}}{\cancel{1688}}} = \sqrt{1} = 1$$

ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్య కాల పరివర్తన పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తున్నట్లుగా చెప్పవచ్చును.

కారకాల పరివర్తన పరీక్ష $= p_{01} \times q_{01} = \sqrt{\frac{\sum \cancel{p_1q_0}}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum \cancel{p_0q_1}} \times \frac{\sum \cancel{q_1p_0}}{\sum q_0p_0} \times \frac{\sum q_1p_1}{\sum \cancel{q_0p_1}}} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$

విలువలు ప్రతిక్షేపించగా $= \sqrt{\frac{\cancel{1740}}{1160} \times \frac{1688}{\cancel{1146}} \times \frac{\cancel{1146}}{1160} \times \frac{1688}{\cancel{1740}}} = \frac{1688}{1160} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$

ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్య పరివర్తన పరీక్షను కూడా సంతృప్తి పరుస్తున్నట్లుగా చెప్పవచ్చును.

7.3 గొలుసు సూచీ సంఖ్యలు:

సూచీ సంఖ్యలను రెండు విధములుగా నిర్మించవచ్చునని గతంలో తెలుసుకొనినాము. అవి స్థిర ఆధార పద్ధతి మరియు గొలుసు ఆధార పద్ధతి. స్థిర ఆధార పద్ధతిలో సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించడానికి ఆధార సంవత్సరము మారకుండా స్థిరంగా ఉంటుంది. గొలుసు సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ప్రతి సంవత్సరానికి దాని ముందు సంవత్సరాన్ని ఆధారంగా తీసుకుంటారు. అందువలన గొలుసు సూచీ సంఖ్యలో ఆధార సంవత్సరం స్థిరంగా ఉండదు.

గొలుసు సూచీ నిర్మాణ పద్ధతి: గొలుసు సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించుటలో దిగువ క్రమమును పాటించాలి.

ఎ. దత్తాంశములోని ప్రతి అంశానికి లింకు సాపేక్షికాలను కనుగొనాలి.

బి. లింకు సాపేక్షికాల ఆధారంగా గొలుసు సూచీని దిగువ సూత్రము ద్వారా నిర్మించాలి.

$$\text{గొలుసు సూచీ సంఖ్య} = \frac{\text{ప్రస్తుత సం॥ లింకు సాపేక్షికాలు} \times \text{గత సం॥ గొలుసు సూచీ సంఖ్య}}{100}$$

7.3.1 ఉదా (1) :

దిగువ వివరాల ఆధారంగా స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను మరియు గొలుసు ఆధార సూచీ సంఖ్యలను లెక్కించుము.

సంవత్సరము	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
ధర	**50**	**60**	**55**	**65**	**75**	**80**	**70**	**60**	**64**	**85**

జవాబు: స్థిర ఆధార పద్ధతి

సంవత్సరము	ధర	1990వ సంవత్సరము ఆధారంగా స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్య $= \frac{p_1}{p_0} \times 100$
1990	50	(50 ÷ 50) 100 = 100
1991	60	(60 ÷ 50) 100 = 120
1992	55	(55 ÷ 50) 100 = 110
1993	65	(65 ÷ 50) 100 = 130
1994	75	(75 ÷ 50) 100 = 150
1995	80	(80 ÷ 50) 100 = 160
1996	70	(70 ÷ 50) 100 = 140
1997	60	(60 ÷ 50) 100 = 120
1998	64	(64 ÷ 50) 100 = 128
1999	85	(85 ÷ 50) 100 = 170

గొలుసు ఆధార పద్ధతి:

సంవత్సరము	ధర	లింకు సాపేక్షికాలు = $\frac{p_1}{p_0} \times 100$	$\frac{\text{ప్ర.సం.లిం.సా} \times \text{గ.సం.గొ.సూ}}{100}$ గొలుసు సూచీ సంఖ్యలు
1990	50	(50 ÷ 50) 100 = 100	100
1991	60	(60 ÷ 50) 100 = 120	(120 ÷ 100) 100 = 120
1992	55	(55 ÷ 60) 100 = 91.67	(91.67 ÷ 120) 100 = 76.39
1993	65	(65 ÷ 55) 100 = 118.18	(118.18 ÷ 76.39) 100 = 154.71
1994	75	(75 ÷ 65) 100 = 115.38	(115.38 ÷ 154.71) 100 = 74.58
1995	80	(80 ÷ 75) 100 = 106.67	(106.67 ÷ 74.58) 100 = 143.03
1996	70	(70 ÷ 80) 100 = 87.5	(87.5 ÷ 143.03) 100 = 61.18
1997	60	(60 ÷ 70) 100 = 85.71	(85.71 ÷ 61.18) 100 = 140.1
1998	64	(64 ÷ 60) 100 = 106.67	(106.67 ÷ 140.1) 100 = 76.14
1999	85	(85 ÷ 64) 100 = 132.81	(132.81 ÷ 76.14) 100 = 174.43

7.3.2. గొలుసు సూచీ, స్థిర ఆధారాల సూచీ మార్పిడి:

స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను గొలుసు సూచీ సంఖ్యలుగా లేదా గొలుసు సూచీ సంఖ్యలను స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలుగా మార్చవచ్చును.

గొలుసు సూచీ సంఖ్యలను స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలుగా మార్చడం:

గొలుసు సూచీ సంఖ్యలను స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలుగా మార్చడానికి ఈ దిగువ విధాన క్రమమును పాటించాలి.

1. ప్రస్తుత సంవత్సరపు గొలుసు సూచీని స్థిర ఆధారముగా తెలుసుకోవాలి.
2. మొదటి సంవత్సర సూచీని 100గా తీసుకొని తరువాత సంవత్సరాలకు దిగువ సూత్రాన్ని వర్తింప జేయాలి.

$$\text{FBI} = \frac{\text{ప్రస్తుత CBI} \times \text{గత FBI}}{100}$$

FBI = స్థిర ఆధార సూచీ

CBI = గొలుసు ఆధార సూచీ

ఉదా: దిగువనీయబడిన గొలుసు సూచీ సంఖ్యలను స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలుగా మార్చండి.

సంవత్సరము	1990	1991	1992	1993	1994
గొలుసుసూచీ	80	110	120	90	140

జవాబు:

సంవత్సరము	గొలుసు సూచీ సంఖ్యలు	స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలు
1990	80	$(100 \times 80)/100 = 80$
1991	110	$\frac{110 \times 80}{100} = 88$
1992	120	$\frac{120 \times 88}{100} = 105.6$
1993	90	$\frac{90 \times 105.6}{100} = 95.04$
1994	140	$\frac{140 \times 95.04}{100} = 133.1$

7.3.3 స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను గొలుసు ఆధార సూచీ సంఖ్యలుగా మార్చుట:

$$CBI = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

1. స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను ప్రస్తుత సంవత్సర గొలుసు సూచీ సంఖ్యగా తీసుకోవాలి.

ఉదా: దిగువ నీయబడిన స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యల ఆధారంగా గొలుసు ఆధార సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించండి.

సంవత్సరము	1976	1977	1978	1979	1980	1981
స్థిర ఆధార సూచీ	376	392	408	380	392	400

జవాబు:

సంవత్సరం	స్థిర ఆధార సూచీ	గొలుసు సూచీ సంఖ్యలు
1976	376	100
1977	392	(392 ÷ 376) 100 = 104.26
1978	408	(408 ÷ 392) 100 = 104.08
1979	380	(380 ÷ 408) 100 = 93.14
1980	392	(392 ÷ 380) 100 = 106.16
1981	400	(400 ÷ 392) 100 = 102.04

7.3.4 సూచీ సంఖ్యలను జోడించడం:

ఒక దత్తాంశంలో 2 ఆధార సంవత్సరములను ఎంపిక చేసి సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించిన పిదప ఆ రెండు సూచీ సంఖ్యలను ఒకే ఆధార కాలముకు జతపరచడాన్ని సూచీ సంఖ్యలను జోడించటం అంటారు. సంఖ్యలను జోడించే పద్ధతి దిగువ విధంగా ఉండవచ్చును.

(ఎ) పాత ఆధార సంవత్సరముతో సూచీలను జోడించడం

$$\text{జోడించిన సూచీ} = \frac{\text{కొత్త ఆధార సం॥ పాత సూచీ సంఖ్య}}{100} \times \text{ప్రస్తుత సం॥ పాత సూచీ సంఖ్య}$$

(బి) కొత్త ఆధార సంవత్సరముతో సూచీలను జోడించడం

$$\text{జోడించిన సూచీ} = \frac{100}{\text{కొత్త ఆధార సం॥ పాత సూచీ సంఖ్య}} \times \text{ప్రస్తుత సం॥ పాత సూచీ సంఖ్య}$$

7.4 అభ్యాసాలు:

1. కారకాల పరివర్తన, కాల పరివర్తన పరీక్షలను గురించి వ్రాయుము.
2. గొలుసు సూచీ అనగానేమి?
3. సూచీ సంఖ్యల జోడింపు అనగానేమి?
4. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించి కాల పరివర్తన పరీక్షను మరియు అంశ పరివర్తన పరీక్షను ఏ విధంగా ఋజువు చేయును.

వస్తువు	ఆధార సంవత్సరము		వర్తమాన సంవత్సరము	
	ధర	పరిమాణము	ధర	పరిమాణము
గోధుమ	6	50	8	100
నెయ్యి	10	15	11	20
ఇంధనము	2	20	4	30
పంచదార	5	10	8	30
వస్త్రములు	10	40	12	50

(జవాబు: 129.64)

5. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా వివిధ పద్ధతుల ద్వారా సూచీలను నిర్మించి ఏ పద్ధతి కాల పరివర్తన, కారకాల పరివర్తన పరీక్షలను సంతృప్తి పరుస్తుందో తెలపండి.

వస్తువులు	1995		1996	
	ధర	ఖర్చు	ధర	ఖర్చు
A	20	240	24	288
B	10	80	12	108
C	40	120	50	200
D	16	160	16	144

6. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్యను నిర్మిచి పరీక్షలను ఋజువు చేయండి.

వస్తువు	1995		1996	
	ధర	మొత్తం విలువ	ధర	మొత్తం విలువ
A	8	80	10	110
B	10	90	12	108
C	16	256	20	340

7. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించి అది పరీక్షలను ఋజువు చేస్తుందా? నిరూపించండి.

వస్తువు	ధరలు		పరిమాణము	
	1995	1996	1995	1996
A	5	8	50	50
B	2	2	100	100
C	4	5	50	75
D	10	10	40	30
E	7	12	50	40

(జవాబు 132.05)

8. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా పరీక్షలను ఋజువు చేయుము.

వస్తువు	పరిమాణము		ధరలు	
	1995	1996	1995	1996
P	50	60	8	10
Q	100	120	4	6
R	120	140	6	8
S	80	100	10	12
T	50	80	12	14

9. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించి పరీక్షలను ఋజువు చేయుము.

వస్తువులు	1995		1996	
	పరిమాణము	మొత్తం	పరిమాణము	మొత్తం
A	40	320	50	450
B	80	320	90	360
C	60	300	70	420
D	20	180	20	320

10. క్రింది దత్తాంశం ఆధారంగా స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను, గొలుసు ఆధార సూచీ సంఖ్యలను తయారు చేయుము.

సంవత్సరము	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
ధర	70	50	60	75	70	50	40	60	75

11. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా 1991వ సం॥ను ఆధార సం॥గా తీసుకొని సూచీలను నిర్మించండి.

సంవత్సరం	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
ధర	67	90	91	92	87	88	89	90

12. దిగువ ఇచ్చిన లింకు సాపేక్షికాల నుండి గొలుసు సూచీలను తయారు చేయండి.

సంవత్సరం	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
లింకు సాపేక్షికాలు	100	120	110	125	130	115	95

13. దిగువ ఇచ్చిన గొలుసు సూచీ సంఖ్యల నుండి స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను లెక్కించండి.

సంవత్సరము	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
గొలుసు సూచీలు	90	110	120	115	130	120	150	140

14. దిగువ దత్తాంశం నుండి గొలుసు సూచీ సంఖ్యల నుండి స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను లెక్కించండి.

సంవత్సరం	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
గొలుసు సూచీలు	80	110	120	105	125	130	135

15. దిగువనీయబడిన గొలుసు సూచీ సంఖ్యల నుండి స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

సంవత్సరం	1993	1994	1995	1996	1997	1998
గొలుసు సూచీ సంఖ్య	105	75	71	105	95	90

16. దిగువనీయబడిన స్థిర ఆధార సూచీల నుండి గొలుసు సూచీలను నిర్మించుము.

సంవత్సరము	1990	1991	1992	1993	1994	1995
స్థిర ఆధార సూచీ	100	150	115.7	135.5	175	200

17. దిగువ వివరాలకు స్థిర ఆధారాల నుండి గొలుసు సూచీలను లెక్కింపుము.

సంవత్సరము	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
గోధుమ ఉత్పత్తి	128	122	116	120	120	130	135	146

18. దిగువనీయబడిన స్థిర సూచీల నుండి గొలుసు సూచీలను కనుగొనండి.

సంవత్సరము	1991	1992	1993	1994	1995	1996
స్థిర ఆధార సూచీ	200	220	240	250	280	300

రచయిత

శ్రీ కె. ఉపాధ్యాయ

పాఠం 7 సూచీ సంఖ్యల సూత్రాల పరిపూర్ణత్వపు పరీక్షలు

ఉద్దేశ్యము:

ఈ పాఠ్యాంశాన్ని అధ్యయనం చేయడం వలన మీరు :-

* వివిధ సూచీ సంఖ్యల సూత్రాల పరిపూర్ణత్వాన్ని వివరించడము
* గొలుసు సూచీలు, ఆధార సంవత్సరమును మార్చడము, జతపరచడము మొదలైనవి తెలుసుకుంటారు

పాఠ్య నిర్మాణక్రమం

7.1 పరిచయము:

సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణానికి అనేక సూత్రాలు ఉపయోగిస్తున్నారు. ఎంపిక చేసిన సూత్రము దత్తాంశమునకు సముచితమైనది, లేనిది నిర్ణయించాల్సి యుంటుంది. దిగువ తెలిపిన పరీక్షలను సంతృప్తిపరచినట్లయితే ఆ సూత్రము పరిపూర్ణమయినది అని, సంతృప్తి పరచకపోతే ఆ సూత్రము అసంపూర్ణమయినదని పరిగణిస్తారు.

7.2 సూచీ సంఖ్యల సూత్రాల పరీక్షలు:

7.2.1. కాల పరివర్తన పరీక్షలు : మంచి సూచీ సంఖ్య అనునది కాల పరివర్తన పరీక్షను సంతృప్తి పరచాలి. దీనిని ఇర్వింగ్ ఫిషర్ కనుగొన్నాడు. ఈ సూత్రాలు కాలములో ముందుకు, వెనుకకు పని చేస్తున్నది, లేనిది నిర్ధారణ చేయడానికి ఈ పరీక్ష ఉపయోగ పడుతుంది. "ఫిషర్ ప్రకారం" " ఆధార సంవత్సరం మీద ఆధారపడిన వర్తమాన సంవత్సరపు సూచీ సంఖ్య, వర్తమాన సంవత్సరం మీద ఆధారపడిన ఆధార సంవత్సరపు సూచీ సంఖ్యకు వ్యుత్క్రమంగా ఉంటుంది. "

కాల పరివర్తన పరీక్ష $= P_{01} \times P_{10} = 1$

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \quad , \quad P_{10} = \sqrt{\frac{\sum p_0q_0}{\sum p_1q_0} \times \frac{\sum p_0q_1}{\sum p_1q_1}}$$

$$T.R.T = \sqrt{\frac{\cancel{\sum p_1q_0}}{\cancel{\sum p_0q_0}} \times \frac{\cancel{\sum p_1q_1}}{\cancel{\sum p_0q_1}} \times \frac{\cancel{\sum p_0q_0}}{\cancel{\sum p_1q_0}} \times \frac{\cancel{\sum p_0q_1}}{\cancel{\sum p_1q_1}}} = \sqrt{1} = 1$$

7.2.2. కారకాల పరివర్తన పరీక్ష లేక అంశ పరివర్తన పరీక్ష: దీని ప్రకారం ధరలోని మార్పు పరిమాణంలో మార్పుతో గుణించగా వచ్చిన మొత్తం విలువలోని మార్పుకు సమానంగా ఉండాలి.

సూత్రం $= p_{01} \times q_{01} = \dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$

$$p_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \quad , \quad q_{01} = \sqrt{\frac{\sum q_1p_0}{\sum q_0p_0} \times \frac{\sum q_1p_1}{\sum q_0p_1}}$$

$$F.R.T. = \sqrt{\frac{\sum \cancel{p_1q_0}}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum \cancel{p_0q_1}} \times \frac{\sum \cancel{q_1p_0}}{\sum q_0p_0} \times \frac{\sum q_1p_1}{\sum \cancel{q_0p_1}}} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$$

7.2.3. యూనిట్ పరీక్ష: సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించుటలో ఉపయోగించే సూత్రాలు ధరలను కొలిచిన యూనిట్లను బట్టి మారకూడదు. సామాన్య సమిష్టి పద్ధతి ప్రకారం నిర్మించిన సూచీ సంఖ్య తప్ప మిగిలిన అన్ని పద్ధతులు ఈ పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తాయి.

7.2.4. చక్రీయ పరీక్ష: చక్రీయ పరీక్ష రెండు కంటే ఎక్కువ కాలాలకు విస్తరింపజేసే కాల పరివర్తన పరీక్షగా చెప్పవచ్చును. దీని ప్రకారం సన్నిహిత సంబంధం కలిగియున్న విషయములకు సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించినపుడు విరుద్ధమైన ఫలితాలు రాకూడదు. ఉదాహరణకు 3 కాలాలకు సంబంధించిన దత్తాంశమును తీసుకొనినపుడు ఆ సూచీల మధ్య సంబంధం దిగువ విధంగా ఉండాలి.

చక్రీయ పరీక్ష $= P_{01} \times P_{12} \times P_{20} = 1$ లేదా

$$\frac{\sum p_1}{\sum p_0} \times \frac{\sum p_2}{\sum p_1} \times \frac{\sum p_0}{\sum p_2} = 1 \text{ లేదా}$$

$$\frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q} \times \frac{\sum p_2 q}{\sum p_1 q} \times \frac{\sum p_0 q}{\sum p_2 q} = 1$$

ఉదా (1): **దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించి అది పరీక్షలను సంతృప్తి పరుస్తుంది, లేనిది నిరూపించండి.**

అంశము	ఆధార సంవత్సరము		వర్తమాన సంవత్సరము	
	ధర	ఖర్చు	ధర	ఖర్చు
P	6	300	10	560
Q	2	200	2	240
R	4	240	6	360
S	10	300	12	288
T	3	120	8	240

జవాబు: లెక్కలో వస్తు పరిమాణము ఇవ్వనందున ఖర్చును ధరతో భాగించి పరిమాణమును కనుగొనాలి.

ఆధార సంవత్సర పరిమాణము $= \frac{\text{ఖర్చు}}{\text{ధర}}$	వర్తమాన సంవత్సర పరిమాణము $= \frac{\text{ఖర్చు}}{\text{ధర}}$
$\frac{300}{6} = 50$	$\frac{560}{10} = 56$
$\frac{200}{2} = 100$	$\frac{240}{2} = 120$
$\frac{240}{4} = 60$	$\frac{360}{6} = 60$
$\frac{300}{10} = 30$	$\frac{288}{12} = 24$
$\frac{120}{3} = 40$	$\frac{240}{8} = 30$

అంశాలు	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
P	6	50	10	56	500	300	560	336
Q	2	100	2	120	200	200	240	240
R	4	60	6	60	360	240	360	240
S	10	30	12	24	360	300	288	240
T	3	40	8	30	320	120	240	90
					1740	1160	1688	1146

ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య $= \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$

$$= \sqrt{\frac{1740}{1160} \times \frac{1688}{1146}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.5 \times 1.47} \times 100 = \sqrt{2.205} \times 100$$

$$= 1.4849 \times 100 = 148.5$$

కాల పరివర్తన పరీక్ష $= \sqrt{\frac{\sum \cancel{p_1q_0}}{\sum \cancel{p_0q_0}} \times \frac{\sum \cancel{p_1q_1}}{\sum \cancel{p_0q_1}} \times \frac{\sum \cancel{p_0q_0}}{\sum \cancel{p_1q_0}} \times \frac{\sum \cancel{p_0q_1}}{\sum \cancel{p_1q_1}}} = \sqrt{1} = 1$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{1740}}{\cancel{1160}} \times \frac{\cancel{1688}}{\cancel{1146}} \times \frac{\cancel{1160}}{\cancel{1740}} \times \frac{\cancel{1146}}{\cancel{1688}}} = \sqrt{1} = 1$$

ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్య కాల పరివర్తన పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తున్నట్లుగా చెప్పవచ్చును.

కారకాల పరివర్తన పరీక్ష $= p_{01} \times q_{01} = \sqrt{\frac{\sum \cancel{p_1q_0}}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum \cancel{p_0q_1}} \times \frac{\sum \cancel{q_1p_0}}{\sum q_0p_0} \times \frac{\sum q_1p_1}{\sum \cancel{q_0p_1}}} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$

విలువలు ప్రతిక్షేపించగా $= \sqrt{\frac{\cancel{1740}}{1160} \times \frac{1688}{\cancel{1146}} \times \frac{\cancel{1146}}{1160} \times \frac{1688}{\cancel{1740}}} = \frac{1688}{1160} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$

ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్య పరివర్తన పరీక్షను కూడా సంతృప్తి పరుస్తున్నట్లుగా చెప్పవచ్చును.

7.3 గొలుసు సూచీ సంఖ్యలు:

సూచీ సంఖ్యలను రెండు విధములుగా నిర్మించవచ్చునని గతంలో తెలుసుకొనినాము. అవి స్థిర ఆధార పద్ధతి మరియు గొలుసు ఆధార పద్ధతి. స్థిర ఆధార పద్ధతిలో సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించడానికి ఆధార సంవత్సరము మారకుండా స్థిరంగా ఉంటుంది. గొలుసు సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ప్రతి సంవత్సరానికి దాని ముందు సంవత్సరాన్ని ఆధారంగా తీసుకుంటారు. అందువలన గొలుసు సూచీ సంఖ్యలో ఆధార సంవత్సరం స్థిరంగా ఉండదు.

గొలుసు సూచీ నిర్మాణ పద్ధతి: గొలుసు సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించుటలో దిగువ క్రమమును పాటించాలి.

ఎ. దత్తాంశములోని ప్రతి అంశానికి లింకు సాపేక్షికాలను కనుగొనాలి.

బి. లింకు సాపేక్షికాల ఆధారంగా గొలుసు సూచీని దిగువ సూత్రము ద్వారా నిర్మించాలి.

$$\text{గొలుసు సూచీ సంఖ్య} = \frac{\text{ప్రస్తుత సం॥ లింకు సాపేక్షికాలు} \times \text{గత సం॥ గొలుసు సూచీ సంఖ్య}}{100}$$

7.3.1 ఉదా (1) :

దిగువ వివరాల ఆధారంగా స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను మరియు గొలుసు ఆధార సూచీ సంఖ్యలను లెక్కించుము.

సంవత్సరము	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**	**1995**	**1996**	**1997**	**1998**	**1999**
ధర	**50**	**60**	**55**	**65**	**75**	**80**	**70**	**60**	**64**	**85**

జవాబు: స్థిర ఆధార పద్ధతి

సంవత్సరము	ధర	1990వ సంవత్సరము ఆధారంగా స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్య $= \frac{p_1}{p_0} \times 100$
1990	50	(50 ÷ 50) 100 = 100
1991	60	(60 ÷ 50) 100 = 120
1992	55	(55 ÷ 50) 100 = 110
1993	65	(65 ÷ 50) 100 = 130
1994	75	(75 ÷ 50) 100 = 150
1995	80	(80 ÷ 50) 100 = 160
1996	70	(70 ÷ 50) 100 = 140
1997	60	(60 ÷ 50) 100 = 120
1998	64	(64 ÷ 50) 100 = 128
1999	85	(85 ÷ 50) 100 = 170

గొలుసు ఆధార పద్ధతి:

సంవత్సరము	ధర	లింకు సాపేక్షికాలు = $\frac{p_1}{p_0} \times 100$	$\frac{\text{ప్ర.సం.లిం.సా} \times \text{గ.సం.గొ.సూ}}{100}$ గొలుసు సూచీ సంఖ్యలు
1990	50	(50 ÷ 50) 100 = 100	100
1991	60	(60 ÷ 50) 100 = 120	(120 ÷ 100) 100 = 120
1992	55	(55 ÷ 60) 100 = 91.67	(91.67 ÷ 120) 100 = 76.39
1993	65	(65 ÷ 55) 100 = 118.18	(118.18 ÷ 76.39) 100 = 154.71
1994	75	(75 ÷ 65) 100 = 115.38	(115.38 ÷ 154.71) 100 = 74.58
1995	80	(80 ÷ 75) 100 = 106.67	(106.67 ÷ 74.58) 100 = 143.03
1996	70	(70 ÷ 80) 100 = 87.5	(87.5 ÷ 143.03) 100 = 61.18
1997	60	(60 ÷ 70) 100 = 85.71	(85.71 ÷ 61.18) 100 = 140.1
1998	64	(64 ÷ 60) 100 = 106.67	(106.67 ÷ 140.1) 100 = 76.14
1999	85	(85 ÷ 64) 100 = 132.81	(132.81 ÷ 76.14) 100 = 174.43

7.3.2. గొలుసు సూచీ, స్థిర ఆధారాల సూచీ మార్పిడి:

స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను గొలుసు సూచీ సంఖ్యలుగా లేదా గొలుసు సూచీ సంఖ్యలను స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలుగా మార్చవచ్చును.

గొలుసు సూచీ సంఖ్యలను స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలుగా మార్చడం:

గొలుసు సూచీ సంఖ్యలను స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలుగా మార్చడానికి ఈ దిగువ విధాన క్రమమును పాటించాలి.

1. ప్రస్తుత సంవత్సరపు గొలుసు సూచీని స్థిర ఆధారముగా తెలుసుకోవాలి.

2. మొదటి సంవత్సర సూచీని 100గా తీసుకొని తరువాత సంవత్సరాలకు దిగువ సూత్రాన్ని వర్తింప జేయాలి.

$$FBI = \frac{\text{ప్రస్తుత CBI} \times \text{గత FBI}}{100}$$

FBI = స్థిర ఆధార సూచీ

CBI = గొలుసు ఆధార సూచీ

ఉదా: దిగువనీయబడిన గొలుసు సూచీ సంఖ్యలను స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలుగా మార్చండి.

సంవత్సరము	**1990**	**1991**	**1992**	**1993**	**1994**
గొలుసుసూచీ	**80**	**110**	**120**	**90**	**140**

జవాబు:

సంవత్సరము	గొలుసు సూచీ సంఖ్యలు	స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలు
1990	80	$(100\times80)/100 = 80$
1991	110	$\frac{110 \times 80}{100} = 88$
1992	120	$\frac{120 \times 88}{100} = 105.6$
1993	90	$\frac{90 \times 105.6}{100} = 95.04$
1994	140	$\frac{140 \times 95.04}{100} = 133.1$

7.3.3 స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను గొలుసు ఆధార సూచీ సంఖ్యలుగా మార్చుట:

$$CBI = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

1. స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను ప్రస్తుత సంవత్సర గొలుసు సూచీ సంఖ్యగా తీసుకోవాలి.

ఉదా: దిగువ నీయబడిన స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యల ఆధారంగా గొలుసు ఆధార సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించండి.

సంవత్సరము	**1976**	**1977**	**1978**	**1979**	**1980**	**1981**
స్థిర ఆధార సూచీ	**376**	**392**	**408**	**380**	**392**	**400**

జవాబు:

సంవత్సరం	**స్థిర ఆధార సూచీ**	**గొలుసు సూచీ సంఖ్యలు**
1976	376	100
1977	392	(392 ÷ 376) 100 = 104.26
1978	408	(408 ÷ 392) 100 = 104.08
1979	380	(380 ÷ 408) 100 = 93.14
1980	392	(392 ÷ 380) 100 = 106.16
1981	400	(400 ÷ 392) 100 = 102.04

7.3.4 సూచీ సంఖ్యలను జోడించడం:

ఒక దత్తాంశంలో 2 ఆధార సంవత్సరములను ఎంపిక చేసి సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించిన పిదప ఆ రెండు సూచీ సంఖ్యలను ఒకే ఆధార కాలముకు జతపరచడాన్ని సూచీ సంఖ్యలను జోడించటం అంటారు. సంఖ్యలను జోడించే పద్ధతి దిగువ విధంగా ఉండవచ్చును.

(ఏ) పాత ఆధార సంవత్సరముతో సూచీలను జోడించడం

$$\text{జోడించిన సూచీ} = \frac{\text{కొత్త ఆధార సం॥ పాత సూచీ సంఖ్య}}{100} \times \text{ప్రస్తుత సం॥ పాత సూచీ సంఖ్య}$$

(బి) కొత్త ఆధార సంవత్సరముతో సూచీలను జోడించడం

$$\text{జోడించిన సూచీ} = \frac{100}{\text{కొత్త ఆధార సం॥ పాత సూచీ సంఖ్య}} \times \text{ప్రస్తుత సం॥ పాత సూచీ సంఖ్య}$$

7.4 అభ్యాసాలు:

1. కారకాల పరివర్తన, కాల పరివర్తన పరీక్షలను గురించి వ్రాయుము.
2. గొలుసు సూచీ అనగానేమి?
3. సూచీ సంఖ్యల జోడింపు అనగానేమి?
4. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించి కాల పరివర్తన పరీక్షను మరియు అంశ పరివర్తన పరీక్షను ఏ విధంగా ఋజువు చేయును.

వస్తువు	ఆధార సంవత్సరము		వర్తమాన సంవత్సరము	
	ధర	పరిమాణము	ధర	పరిమాణము
గోధుమ	6	50	8	100
నెయ్యి	10	15	11	20
ఇంధనము	2	20	4	30
పంచదార	5	10	8	30
వస్త్రములు	10	40	12	50

(జవాబు: 129.64)

5. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా వివిధ పద్ధతుల ద్వారా సూచీలను నిర్మించి ఏ పద్ధతి కాల పరివర్తన, కారకాల పరివర్తన పరీక్షలను సంతృప్తి పరుస్తుందో తెలపండి.

వస్తువులు	1995		1996	
	ధర	ఖర్చు	ధర	ఖర్చు
A	20	240	24	288
B	10	80	12	108
C	40	120	50	200
D	16	160	16	144

6. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్యను నిర్మిచి పరీక్షలను ఋజువు చేయండి.

వస్తువు	1995		1996	
	ధర	మొత్తం విలువ	ధర	మొత్తం విలువ
A	8	80	10	110
B	10	90	12	108
C	16	256	20	340

7. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించి అది పరీక్షలను ఋజువు చేస్తుందా? నిరూపించండి.

వస్తువు	ధరలు		పరిమాణము	
	1995	1996	1995	1996
A	5	8	50	50
B	2	2	100	100
C	4	5	50	75
D	10	10	40	30
E	7	12	50	40

(జవాబు 132.05)

8. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా పరీక్షలను ఋజువు చేయుము.

వస్తువు	పరిమాణము		ధరలు	
	1995	1996	1995	1996
P	50	60	8	10
Q	100	120	4	6
R	120	140	6	8
S	80	100	10	12
T	50	80	12	14

9. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా ఫిషర్స్ సూచీ సంఖ్యను లెక్కించి పరీక్షలను ఋజువు చేయుము.

వస్తువులు	1995		1996	
	పరిమాణము	మొత్తం	పరిమాణము	మొత్తం
A	40	320	50	450
B	80	320	90	360
C	60	300	70	420
D	20	180	20	320

10. క్రింది దత్తాంశం ఆధారంగా స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను, గొలుసు ఆధార సూచీ సంఖ్యలను తయారు చేయుము.

సంవత్సరము	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
ధర	70	50	60	75	70	50	40	60	75

11. దిగువ దత్తాంశం ఆధారంగా 1991వ సం॥ను ఆధార సం॥గా తీసుకొని సూచీలను నిర్మించండి.

సంవత్సరం	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
ధర	67	90	91	92	87	88	89	90

12. దిగువ ఇచ్చిన లింకు సాపేక్షికాల నుండి గొలుసు సూచీలను తయారు చేయండి.

సంవత్సరం	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
లింకు సాపేక్షికాలు	100	120	110	125	130	115	95

13. దిగువ ఇచ్చిన గొలుసు సూచీ సంఖ్యల నుండి స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను లెక్కించండి.

సంవత్సరము	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
గొలుసు సూచీలు	90	110	120	115	130	120	150	140

14. దిగువ దత్తాంశం నుండి గొలుసు సూచీ సంఖ్యల నుండి స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను లెక్కించండి.

సంవత్సరం	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
గొలుసు సూచీలు	80	110	120	105	125	130	135

15. దిగువనీయబడిన గొలుసు సూచీ సంఖ్యల నుండి స్థిర ఆధార సూచీ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

సంవత్సరం	1993	1994	1995	1996	1997	1998
గొలుసు సూచీ సంఖ్య	105	75	71	105	95	90

16. దిగువనీయబడిన స్థిర ఆధార సూచీల నుండి గొలుసు సూచీలను నిర్మించుము.

సంవత్సరము	1990	1991	1992	1993	1994	1995
స్థిర ఆధార సూచీ	100	150	115.7	135.5	175	200

17. దిగువ వివరాలకు స్థిర ఆధారాల నుండి గొలుసు సూచీలను లెక్కింపుము.

సంవత్సరము	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
గోధుమ ఉత్పత్తి	128	122	116	120	120	130	135	146

18. దిగువనీయబడిన స్థిర సూచీల నుండి గొలుసు సూచీలను కనుగొనండి.

సంవత్సరము	1991	1992	1993	1994	1995	1996
స్థిర ఆధార సూచీ	200	220	240	250	280	300

రచయిత
శ్రీ కె. ఉపాధ్యాయ

పాఠం 9

వినియోగదారు - ధరల సూచీలు

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలను తెలుసుకోగలరు.

* వినియోగదారు ధర సూచీ గురించి విద్యార్థులలో అవగాహన కల్గించుట.
* **వినియోగదారు ధర సూచీ నిర్మాణ నైపుణ్యాన్ని విద్యార్థులకు అందించుట.**

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

9.1 ఉపోద్ఘాతం

9.2 ప్రాముఖ్యత

9.3 నిర్మాణం

9.4 నిర్మాణ పద్ధతులు

9.5 పరిమితులు

9.6 సారాంశం

9.7 ప్రశ్నలు

9.1 ఉపోద్ఘాతం :

నిత్య జీవితంలో మనం అనేక రకాలయిన వస్తువులను కొనుగోలు చేసి, వినియోగిస్తుంటాం. ఈ వస్తువుల ధరలు పెరిగినప్పుడు మన కొనుగోలు శక్తి తగ్గిపోతుంది. గతంలో మనం పదిరూపాయలకు ఒక కిలో పంచదార కొనుగోలు చేస్తే, అదే పది రూపాయలకు, ధరలు పెరగడం వల్ల, ప్రస్తుతం 750 గ్రాముల పంచదారే కొనుగోలు చేయగలం.

ఈ విధంగా ఒక ఉద్యోగి తనకు లభించే జీతంతో గతంలో కంటే తక్కువ పరిమాణంలోనే వస్తువులను కొనుగోలు చేయగలుగుతాడు. అంటే, అతని వాస్తవిక జీతం తగ్గిపోతున్నదన్నమాట. ఈ నష్టాన్ని భర్తీ చేయడానికే ఉద్యోగులకు కరువుభత్యం చెల్లిస్తారు. ఉద్యోగులకు ఈ కరువు భత్యం 'వినియోగదారుల ధర సూచీ' ఆధారంగా చెల్లిస్తారు.

ధరల స్థాయిలో ఏర్పడే మార్పులు వినియోగదారుల జీవన ప్రమాణంను ఏ విధంగా ప్రభావితం చేస్తాయో తెలుసుకోవడానికి ఉపయోగించే సూచినే 'వినియోగదారుల ధరల సూచీ' అంటారు. వివిధ తరగతుల ప్రజల జీవన వ్యయాలలో మార్పును కొలవడానికి ఈ సూచీ సంఖ్యలను తయారు చేస్తారు. ఈ సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణం వల్ల ఒక తరగతి ప్రజల వర్తమాన సంవత్సర కొనుగోలు శక్తిలోని మార్పును ఆధార సంవత్సర కొనుగోలు శక్తితో పోల్చడానికి వీలు కలుగుతుంది.

ఈ వినియోగదారుల ధరసూచినే జీవన వ్యయసూచీసంఖ్య అని కూడా అంటారు. యదార్థజీవన వ్యయాన్ని ఈ సూచీ కొలవదు. అంతేకాక, ధరల స్థాయిలలోని మార్పుల వల్ల మాత్రమే కాకుండ, ఇతర కారణాల వల్ల కూడా జీవన వ్యయంలో మార్పులు సంభవించవచ్చు. ఉదాహరణకు అత్యవసర పరిస్థితులలో విధించే రేషనింగ్, కంట్రోల్ల వల్ల ప్రజల వినియోగ అలవాట్లలో మార్పు రావచ్చు. అందువల్ల 1944లో 'అమెరికా గణాంక సంస్థ' వారు - జీవన వ్యయసూచీ సంఖ్యను 'వినియోగదార్ల ధర సూచీ'గ వ్యవహరించాలని సూచించారు. అప్పటి నుంచి, అన్ని దేశాలలలో ఈ మార్పు అమలులోకి వచ్చింది.

9.2. ప్రాముఖ్యత :

9.2.1 : వివిధ రకాల ప్రజలపై ధరల ప్రభావాన్ని అధ్యయనం చేయడానికి ఇవి ఉపయోగపడతాయి.

9.2.2 : ద్రవ్యం కొనుగోలు శక్తిని కొలవడానికి, ప్రజల నిజమైన రాబడులను తెలుసుకొనడానికి ఇవి సహాయపడతాయి.

9.2.3 : ఉద్యోగులకు జీతాలు, కరువుభత్యం మొదలైన వాటిని నిర్ణయించడానికి ఇవి ఆధారంగా ఉంటాయి.

9.2.4 : ప్రభుత్వ విధానాలను రూపొందించడంలోను, ఆర్థిక విధానాల నిర్ణయంలోను ఇవి మార్గదర్శకాలుగ పనిచేస్తాయి. ధరల విధానం, అద్దె నియంత్రణ, పన్నుల విధానం వంటి అనేక అంశాలలో నిర్ణయాలు చేయడానికి ఇవి దోహదపడతాయి.

9.2.5 : ప్రత్యేక తరగతి వస్తువుల సేవలు మార్కెట్ విశ్లేషణకు కూడా ఇవి ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి.

9.3. నిర్మాణం :

ఈ వినియోగదార్ల ధర సూచీ నిర్మాణంలో అనేక దశలు ఉన్నాయి. వాటి గురించి ఇప్పుడు తెలుసుకొందాము.

9.3.1 ఉద్దేశ్యం : ప్రజలలో అనేక తరగతుల వారు ఉంటారు. ఉద్యోగులు, వ్యవసాయదారులు, కార్మికులు, కూలీలు - ఇలా వీరందరూ వినియోగదారులే. వీరి ఆదాయాలు, ఆహారపు అలవాట్లు విభిన్నంగా ఉంటాయి. కనుక వీరికి ప్రత్యేకంగా వేరు, వేరుగా సూచీసంఖ్యలు నిర్మించాలి. ఏ తరగతి ప్రజల కోసం ఈ సూచీసంఖ్యను తయారుచేయాలో మనం ముందుగా నిర్ణయించుకోవాలి. మనం తయారు చేస్తున్న సూచీ ఏ తరగతి ప్రజల కోసం ఉద్దేశించబడిందో స్పష్టంగా నిర్ణయించబడాలి. ప్రభుత్వోద్యోగుల కోసం సూచీ తయారు చేస్తుంటే, కేంద్ర ప్రభుత్వ ఉద్యోగులా, రాష్ట్ర ప్రభుత్వ ఉద్యోగులా, స్థానిక ప్రభుత్వాల ఉద్యోగులా - ఎవరికోసం ? అనే అంశాన్ని ముందుగా నిర్ధారించుకోవడం అవసరం. దీని వలన కాలయాపన, ఆర్థిక వనరుల వృథాను మనం అరికట్టవచ్చు.

9.3.2 కుటుంబ బడ్జెట్ విచారణ : ఏ తరగతి ప్రజల కోసం సూచీని నిర్మిస్తున్నామో ఆ తరగతికి చెందిన కొన్ని కుటుంబాలను యాధృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతి ద్వారా ఎన్నుకోవాలి. అలా ఎంపిక చేసుకొన్న కుటుంబాల ఆదాయ, వ్యయాల తీరుతెన్నులను గురించి విచారణ జరపాలి. దీనినే కుటుంబ బడ్జెట్ విచారణ అంటారు.

9.3.3 వస్తువుల ఎంపిక : విచారణలో ఎంపిక చేయబడిన కుటుంబాలు ఏ వస్తువులు ఎంత పరిమాణంలో వినియోగిస్తున్నామో సమాచారం సేకరించాలి. ఎంపిక చేసిన కుటుంబాలు సాధారణంగా వాడే వస్తువులను మాత్రమే సూచీ నిర్మాణంలో ఉపయోగించాలి.

9.3.4 ధరల సేకరణ : వినియోగదారులు ఉపయోగించే వస్తువులు ఎంపిక చేసిన తర్వాత, వాటి చిల్లరధరలను వారు నివసించే ప్రాంతాల దుకాణాల నుంచి సేకరించాలి. ఈ విధంగా సేకరించిన ధరలను బట్టి, ఒక్కొక్క కుటుంబానికి సగటున ఎంత వ్యయమవుతుందో తెలుసుకోవాలి. నిర్ణీత కాలవ్యవధుల్లో నాణ్యతపరంగా ధరల వివరాలు సేకరించాలి.

9.3.5 ఆధార సంవత్సర ఎంపిక : సేకరించిన వివరాల నుంచి ఏదో ఒక సంవత్సరాన్ని ఆధార సంవత్సరంగా నిర్ణయించాలి. ఆధార సంవత్సరం సాధారణ సంవత్సరం అయి ఉండాలి. అంటే, ఆ సంవత్సరంలో ఆర్థిక ఒడిదుడుకులు గాని, ప్రకృతివైపరీత్యాలు గాని సంభవించి ఉండకూడదు.

9.3.6 భారాలు ఇవ్వడం : అన్ని వస్తువులకు వినియోగదారులు ఒకే రకమయిన ప్రాముఖ్యత నివ్వరు. కొన్ని వస్తువులకు అధిక ప్రాధాన్యతనిస్తారు. వస్తువుల సాపేక్ష ప్రాముఖ్యతను బట్టి, ఆయా వస్తువులకు భారాలు ఇవ్వాలి. వినియోగదారులు వివిధ వస్తువులపై చేసే ఖర్చును బట్టి, ఆయా వస్తువులు సాపేక్ష ప్రాధాన్యతను నిర్ణయించాలి.

ఈ సూచీ సంఖ్యలను సాధారణంగా వారినికి ఒకసారి నిర్మించాలి. సగటు వారపు సూచీసంఖ్యను మాసపు సూచీసంఖ్యగను, సగటు మాసపు సూచీసంఖ్యను సంవత్సర సూచీగను పరిగణించవలెను.

9.4. నిర్మాణ పద్ధతులు :

వినియోగదారు ధర సూచీ నిర్మాణానికి ముఖ్యంగా రెండు పద్ధతులు వున్నాయి. వాటి గురించి తెలుసుకుందాము.

9.4.1 సమిష్టి వ్యయం పద్ధతి : ఈ పద్ధతి మనం గతంలో నేర్చుకొన్న లాస్పెయర్ పద్ధతికి భిన్నం కాదు. ఈ పద్ధతిలో ఏ తరగతి ప్రజలనుద్దేశించి సూచీ నిర్మించదలిచామో, ఆ తరగతి ప్రజల ఆధార సంవత్సర వినియోగవస్తువుల పరిమాణాన్ని భారంగా తీసుకోవడం జరుగుతుంది. వర్తమాన సంవత్సరంలో వివిధ వస్తువుల ధరలను (P_1), ఆధార సంవత్సర పరిమాణంతో (Q_0) గుణించి - ఆ వస్తువులను కొనడానికి అయిన సమిష్టి వ్యయాన్ని ($P_1 Q_0$) కనుక్కోవాలి. అదే విధంగా ఆధార సంవత్సర ధరలను (P_0), ఆధార సంవత్సర పరిమాణం (Q_0)తో గుణించి, ఆధార సంవత్సర సమిష్టి వ్యయాన్ని ($P_0 Q_0$) లెక్కకట్టాలి. తరువాత వర్తమాన సంవత్సర సమిష్టి వ్యయాన్ని ($P_1 Q_0$), ఆధార సంవత్సర సమిష్టి వ్యయంతో ($P_0 Q_0$) భాగించి, వచ్చిన దానిని 100 చే గుణిస్తే వినియోగదారు ధర సూచీ వస్తుంది.

ఈ పద్ధతిలో సూచీ సంఖ్యను నిర్మించడానికి సూత్రం : $\dfrac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100$

ఉదాహరణ 1 : దిగువ ఇచ్చిన దత్తాంశం నుంచి 2,000 సం॥ ఆధారంగా 2003 సంవత్సరం వినియోగదారు ధర సూచీని సమిష్టి వ్యయం పద్ధతిలో నిర్మించండి.

వస్తువు	2000 సం॥ పరిమాణం	యూనిట్	2000సం॥ ధర రూ. పై	2003 సం॥ ధర రూ. పై
బియ్యం	6 కిలోలు	కిలో	5.75	6.00
గోధుమ	6 కిలోలు	కిలో	5.00	8.00
పెసలు	1 కిలో	కిలో	6.00	9.00
నూనె	6 కిలోలు	కిలో	8.00	10.00
వస్త్రం	4 మీటర్లు	మీటరు	2.00	1.50
అద్దె	1 ఇల్లు	ఒకటి	20.00	15.00

జవాబు :

వస్తువు	2000 సం॥ పరిమాణం (Q_0)	యూనిట్	2000సం॥ ధర (P_0)	2003 సం॥ ధర (P_1)	P_1Q_0	P_0Q_0
బియ్యం	6 కిలోలు	కిలో	5.75	6.00	36.00	34.50
గోధుమ	6 కిలోలు	కిలో	5.00	8.00	48.00	30.00
పెసలు	1 కిలో	కిలో	6.00	9.00	9.00	6.00
నూనె	6 కిలోలు	కిలో	8.00	10.00	60.00	48.00
వస్త్రం	4 మీటర్లు	మీటరు	2.00	1.50	6.00	8.00
అద్దె	1 ఇల్లు	ఒకటి	20.00	15.00	15.00	20.00
					174.00	146.50

$$\sum P_1Q_0 = 174.00,\ \sum P_0Q_0 = 146.50$$

$$\text{వినియోగదారు ధర సూచీ} = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100$$

$$= \frac{174.00}{146.50} \times 100 = 118.77$$

ఉదాహరణ : 2 దిగువ దత్తాంశం నుంచి సమిష్టి వ్యయం పద్ధతిలో వినియోగదారు ధర సూచీని గణన చేయండి.

వస్తువు	2001 ధర	2001 విలువ	2003 ధర	2003 విలువ
A	10	100	8	96
B	16	96	14	98
C	12	36	10	40
D	15	60	5	25

జవాబు :

ఈ లెక్కలలో ధరలు, విలువ ఇవ్వబడినవి. పరిమాణం ఇవ్వలేదు. విలువను ధరతో భాగిస్తే, మనకు పరిమాణం తెలుస్తుంది. కనుక 2003 సం॥ విలువను 2001 సం॥ ధరతో భాగిస్తే మనకు ఆధార సంవత్సర పరిమాణం తెలుస్తుంది.

జవాబు :

వస్తువు	2001 సం॥ పరిమాణం (Q_0)	2001 ధర (P_0)	2003 ధర (P_1)	P_1Q_0	P_0Q_0
A	10	10	8	80	100
B	6	16	14	84	96
C	3	12	10	30	36
D	4	15	5	20	60
				214	292

$$\sum P_1 Q_0 = 214$$

$$\sum P_0 Q_0 = 292$$

$$\text{వినియోగదారు ధర సూచీ} = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100$$

$$= \frac{214}{291} \times 100 = 73.29$$

9.4.2 కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతి : ఈ పద్ధతి భారిత సాపేక్షాల సగటును పోలి వుంటుంది. భారిత సాపేక్షాల సగటు పద్ధతిలో సూచీ సంఖ్యను ఎలా నిర్మించాలో మనం గత అధ్యాయాలలో నేర్చుకొని ఉన్నాము. అదే పద్ధతిని ఇక్కడ కూడా అనుసరించవలసి వుంటుంది.

ఈ పద్ధతిలో ఏ తరగతి ప్రజల సూచీ నిర్మాణం జరుగుతున్నదో, ఆ ప్రజల కుటుంబ బడ్జెట్‌ను అధ్యయనం చేసి వివరాలు సేకరించవలె. తరువాత సమిష్టి వ్యయాన్ని ఆధార సంవత్సరానికి $(P_0 Q_0)$ లెక్కకట్టి దానిని భారంగా తీసుకోవడం జరుగుతుంది. ముందు సాపేక్ష ధరలను కనుగొనవలె. ఈ ధరల సాపేక్షకాలను, విలువల భారాలలో గుణించగా వచ్చిన మొత్తాన్ని భారాల మొత్తంతో భాగిస్తే వినియోగదారు ధర సూచీ సంఖ్య వస్తుంది.

$$\text{సూత్రం} = \frac{\sum PV}{\sum V}$$

$$P \text{ అనగా ధరల సాపేక్షకాలు} = \left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$$

V అనగా $P_0 Q_0$

ఉదాహరణ - 3 : దిగువ దత్తాంశం నుంచి కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతిలో వినియోగదారు ధర సూచీని నిర్మించండి.

వస్తువు	2001 పరిమాణం	2001 ధర	2003 ధర
A	100	8.00	12.00
B	25	6.00	7.50
C	10	5.00	5.25
D	20	48.00	52.00
E	25	15.00	16.50
F	30	9.00	27.50

జవాబు :

వస్తువు	2001 సం॥ పరిమాణం (Q_0)	2001 ధర (P_0)	2003 ధర (P_1)	P $\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$	V P_0Q_0	PV
A	100	8.00	12.00	150.00	800.00	1,20,000.00
B	25	6.00	7.50	125.00	150.00	18,750.00
C	10	5.00	5.25	105.00	50.00	5,250.00
D	20	48.00	52.00	108.33	960.00	1,03,996.80
E	25	15.00	16.50	110.00	375.00	41,250.00
F	30	9.00	27.00	300.00	270.00	81,000.00
					2,605.00	3,70,246.80

$$\sum PV = 3,70,246.80 \qquad \sum V = 2,605$$

వినియోగదారు ధర సూచీ = $\frac{\sum PV}{\sum V} = \frac{3,70,246.80}{2,605} = 142.13$

ఉదాహరణ : 4 ఒక గ్రామంలో మధ్య తరగతి కుటుంబ బడ్జెట్ విచారణ కింది వివరాలు వెల్లడించింది.

అంశాలు :	ఆహారం	అద్దె	దుస్తులు	విద్య	ఇతరాలు
వ్యయశాతం :	30%	25%	15%	10%	20%
2002 ధర :	180	100	70	40	70
2003 ధర :	200	120	90	50	100

వినియోగదారు ధర సూచీని నిర్మించి, జీవన వ్యయంలో మార్పుపై వ్యాఖ్యానించండి.

జవాబు : లెక్కలో ఇవ్వబడిన వ్యయశాతాలనే భారాలుగా ('V'గా) తీసుకోవాలి.

అంశాలు	వ్యయశాతం (V)	2002 ధర (P_0)	2003 ధర (P_1)	P $\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$	PV
ఆహారం	30	180	200	111.11	3,333.30
అద్దె	25	100	120	120.00	3,000.00

దుస్తులు	15	70	90	128.57	1,928.55
విద్య	10	40	50	125.00	1,250.00
ఇతరాలు	20	70	100	142.86	2,857.20
	-------				--------------
	100				12,369.05
	-------				--------------

$$\sum V = 100, \sum PV = 12,369.05$$

వినియోగదారు ధర సూచీ = $\dfrac{\sum PV}{\sum V}$

$$= \frac{12,369.05}{100} = 123.69$$

2002వ సంవత్సరంతో పోలిస్తే ధరలలో 23.69% పెరుగుదల వుంది. 2002లో 1,000 రూ. ఆదాయం గల వ్యక్తి, అదే జీవన ప్రమాణాన్ని కొనసాగించాలంటే, 2003లో అతని ఆదాయం రూ. 1,236.90గా వుండాలి.

కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతిలో ఇప్పటి వరకు అంకమధ్యమాన్ని ఉపయోగించి, వినియోగదారు ధర సూచీని నిర్మించడం మనం నేర్చుకొన్నాం. ఈ పద్ధతిలో సూచీ నిర్మించడానికి గుణమధ్యమాన్ని కూడా మనం ఉపయోగించవచ్చు.

గుణమధ్యమాన్ని ఉపయోగిస్తున్నపుడు, సూచీ కనుగొనడానికి సూత్రం దిగువ విధంగా వుంటుంది.

వినియోగదారు ధర సూచీ = $\text{Antilog of } \dfrac{\sum \text{Log}\, P.V}{\sum V}$

ఉదాహరణ - 5 : దిగువ వివరాల నుంచి గుణమధ్యమాన్ని ఉపయోగించి, కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతిలో వినియోగదారు ధర సూచీని నిర్మించండి.

వ్యయం	సూచీ సంఖ్యలు	భారాలు
ఆహారం	350	10
ఇంధనం	150	2
వస్త్రాలు	200	2
అద్దె	150	2
వివిధాలు	225	4

జవాబు :

వ్యయం	భారం (V)	సూచీ సంఖ్య (P)	$\text{Log}\, P$	$\text{Log}\, P \times V$
ఆహారం	10	350	2.5441	25.4410
ఇంధనం	2	150	2.1761	4.3522
వస్త్రాలు	2	200	2.3010	4.6020
అద్దె	2	150	2.1761	4.3522
వివిధాలు	4	225	2.3522	9.4088
	20			48.1562

$\sum V = 20$ $\qquad \sum \text{Log } P \times V = 48.1562$

వినియోగదారు ధర సూచీ $= \text{Antilog of } \dfrac{\sum \text{Log}\, PV}{\sum V}$

$$= \text{Antilog of } \frac{48.1562}{20}$$

$$= \text{Antilog of } 2.40781$$

$$= 255.8$$

వినియోగదారు ధర సూచీ సంఖ్యను సమిష్టి వ్యయం పద్ధతిలో నిర్మించినా, కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతిలో నిర్మించినా - ఒకే ఫలితం వస్తుందని గమనించవలె.

9.5 పరిమితులు :

9.5.1. వినియోగదారులు ఉపయోగించే వస్తు సమూహంలో మార్పు ఉండదు అనే ప్రాతిపదికతో ఈ సూచీ నిర్మించబడుతుంది. కానీ ఇది వాస్తవ దూరం. మార్కెట్‌లో పరిణమించే మార్పులను బట్టి, కొనుగోలు శక్తిని బట్టి, కొరతను బట్టి, - ఇలా అనేక కారణాల వల్ల వినియోగదార్లు వాడే వస్తువులలో మార్పులు సంభవిస్తాయి.

9.5.2 కుటుంబ బడ్జెట్ విచారణలో తీసుకున్న ప్రతిచయనం మొత్తం ఆ తరగతి ప్రజల అభిరుచులకు, అలవాట్లకు, ప్రాతినిధ్యం వహించకపోవచ్చు. తీసుకొన్న ప్రతిచయనం సరైనదిగా లేకపోతే, మనం నిర్మించే సూచీ వాస్తవాలను ప్రతిబింబించదు.

9.5.3 వినియోగదారుల అభిరుచులలో నిరంతరం అనేక మార్పులు సంభవిస్తుంటాయి. కనుక ఆధార సంవత్సరంలో వినియోగించిన వస్తు పరిమాణాలనే వర్తమాన సంవత్సరానికి కూడా అనువర్తింపజేయడం సహేతుకం కాదు.

9.5.4 వస్తువుల ధరలు దుకాణం, దుకాణానికి మారిపోతూ ఉంటాయి. అలాగే నగదుకు కొనుగోలు చేస్తే ఒక ధర, అరువుకు కొనుగోలు చేస్తే వేరే ధర వసూలు చేస్తారు. వస్తువుల ధరలలో ఏర్పడే ఈ వ్యత్యాసాల వల్ల, మనం నిర్మించే సూచీలలో తప్పనిసరిగా కొంత మేరకు పాక్షికత వుండే అవకాశముంది.

9.6 సారాంశం :

ధరలలో మార్పులు వినియోగదారుల జీవన ప్రమాణాన్ని ఏ విధంగా ప్రభావితం చేస్తాయో తెలుసుకోవడానికి ఉపయోగపడేవే 'వినియోగదారుల ధరల సూచీలు'. జీవన వ్యయంలో మార్పులను కొలవడానికి ఇవి దోహదపడతాయి. ప్రభుత్వాల ఆర్థిక విధానాలు, వేతన విధానాలు, ఈ సూచీ మీద ఆధారపడే వుంటాయి.

ఈ సూచీల నిర్మాణం వివిధ దశలలో జరుగుతుంది. ముందుగా ఏ తరగతి ప్రజల కోసం సూచీ నిర్మిస్తున్నామో, స్పష్టం చేసుకోవాలి. తరువాత ఆ ప్రజల ఆదాయ, వ్యయాల గురించి విచారణ జరపడం, ఆ తరగతి ప్రజలు ఉపయోగించే వస్తువులను ఎంపిక చేసుకోవడం, ధరల వివరాలు సేకరించడం, ఆధార సంవత్సరాన్ని ఎంపిక చేసుకోవడం, భారాలు ఇవ్వడం ఇలా సూచీ నిర్మాణంలో వివిధ దశలు ఉంటాయి.

ఈ వినియోగదారు ధర సూచీని నిర్మించడానికి రెండు పద్ధతులు ఉన్నాయి. అవి సమిష్టి వ్యయం పద్ధతి, కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతి. రెండు పద్ధతులలోను ఫలితం ఒకే విధంగా వుంటుంది. కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతిలో అంకమధ్యమాన్ని గాని, గుణమధ్యమాన్ని కాని ఉపయోగించవచ్చు.

ఈ సూచీ, ప్రజలు ఉపయోగించే వస్తుసమూహం మారుతూ ఉండటం వల్ల, వారి అభిరుచులు మారుతూ ఉండడం వల్ల, ధరలలో తేడాల వల్ల పూర్తిగా వాస్తవాలను ప్రతిబింబించలేకపోవచ్చు.

9.7 ప్రశ్నలు :

1. వినియోగదారు ధర సూచీ అనగానేమి ? దాని ప్రాముఖ్యతను వివరించండి.
2. వినియోగదారు ధర సూచీ నిర్మాణంలో తీసుకోవలసిన చర్యలను తెలుపండి.
3. వినియోగదారు ధర సూచీ నిర్మించే వివిధ పద్ధతులను పేర్కొనండి.
4. వినియోగదారు ధర సూచీ లోపాలను విశదీకరించండి.
5. దిగువ దత్తాంశం నుంచి సమిష్టి వ్యయం పద్ధతిలో వినియోగదారు ధర సూచీని నిర్మించండి.

వస్తువు	2000 సం॥ పరిమాణం	యూనిట్	2000సం॥ ధర రూ. పై	2003 సం॥ ధర రూ. పై
			(పదుల రూపాయలలో)	
వరి	20 కిలోలు	కిలో	1.00	2.00
గోధుమ	50 కిలోలు	కిలో	0.60	1.10
నూనె	10 కిలోలు	కిలో	2.00	4.00

నెయ్యి	500 గ్రా॥	కిలో	8.00	14.00
పంచదార	5 కిలోలు	కిలో	1.00	1.80
వస్త్రాలు	40 మీటర్లు	మీటరు	2.00	3.75
అద్దె	ఒక ఇల్లు	ఒకటి	40.00	75.00

(జవాబు : 1889.40)

6. దిగువ దత్తాంశం నుంచి సమిష్టి వ్యయం పద్ధతిలో వినియోగదారు ధర సూచీని గణన చేయండి.

వస్తువు	ఆధార సం॥ పరిమాణం	ఆధార సం॥ ధర	వర్తమాన సం॥ ధర
A	40	4	3
B	15	3	4
C	20	6	5
D	30	5	2

(జవాబు : 71.58)

7. దిగువ వివరాలకు కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతిలో వినియోగదారు ధర సూచీని కనుక్కోండి.

అంశం	సూచీలు	భారాలు
ఆహారం	352	48
ఇంధనం	230	8
వస్త్రం	220	10
అద్దె	160	12
వివిధాలు	190	15

(జవాబు : 276.41)

8. దిగువ దత్తాంశం నుంచి కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతిలో వినియోగదారు ధర సూచీని నిర్మించండి.

అంశం :	ఆహారం	ఇంధనం	దుస్తులు	అద్దె	ఇతరాలు
వ్యయం :	35%	10%	20%	15%	20%
2000 ధర (రూ.):	150	125	75	30	40
2003 ధర (రూ.):	145	23	65	30	45

(జవాబు : 97.87)

9. దిగువ వివరాల నుంచి కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతిలో వినియోగదారు ధర సూచీని గణన చేయండి.

వస్తువు	A	B	C	D	E
2000 ధర	10	20	35	50	100
2003 ధర	25	32	70	65	120
2000 పరిమాణం	100	92	75	30	20

(జవాబు : 178.31)

10. దిగువ దత్తాంశానికి కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతిలో వినియోగదారు ధర సూచీని గుణ మధ్యమం ద్వారా గణన చేయండి.

వస్తువులు	2000 ధర	2003 ధర	2000 పరిమాణం
గోధుమ	2.00	2.50	40 కిలోలు
పంచదార	3.00	3.25	20 కిలోలు
పాలు	1.50	1.75	10 లీటర్లు

(జవాబు : 117.4)

రచయిత

డా॥ పి.సి. సాయిబాబా

పాఠం 10

సంభావ్యత

(Probability)

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలను తెలుసుకోగలరు.

* ఆధునిక గణిత శాస్త్రంలో సంభావ్యతా వాదము ఒక అత్యంత ఉపయోగకరమైన శాఖలలో ఒకటి. ఏదైనా ఒక విషయము జరుగవచ్చని చెప్పటానికి సంభావ్యత అనే పదము చాలా సందర్భములలో మామూలుగా వాడుతుంటాము. దీనినే "అవకాశము"(Chance)కి మారు పదముగా వాడటం కూడా వ్యవహారంలో వుంది.
* ఈ పాఠంలో సంభావ్యతకు సాంప్రదాయ నిర్వచనంలో వాడే సాంకేతిక పదాలను వివరంగా తెలుసుకుంటాము.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

10.1 యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము (Random Experiment) :

ఒక ప్రయోగాన్ని ఒకే రకమైన (సదృశ) పరిస్థితులలో ఎన్నిమార్లైనా చేయగల్గితే ఈ క్రింది విషయమును గమనించవచ్చును.

(1) దానిలోని ఫలితము ఏకైకము, లేక నిశ్చితము.

(2) దానిలోని ఫలితము ఏకైకము కాదు కాని సంభవించే చాలా ప్రయోగ ఫలితాల జాబితాలో ఒకటి.

అలాంటి ప్రయోగమును యత్నము (Trial) లేదా యాదృచ్ఛిక ప్రయోగము (Random Experiment) అని అంటారు.

ఉదా : - 1. వివిధ కాలాల్లో వస్తువుల ధరల మార్పులపై ఆర్థిక శాస్త్రవేత్త విచారణ.

2. ఒకానొక పంటకు ఏ రసాయనిక ఎరువు ఎక్కువ ప్రయోజనకారి అన్న వ్యవసాయ శాస్త్రవేత్త సమస్య.

3. నాణెం ఎగురవేసే ప్రయోగంలో వచ్చే ఫలితం బొమ్మ (Head) లేదా బొరుసు (Tail).

10.2 ఘటనలు - రకాలు :

10.2.1 లఘు ఘటన : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలోని ఫలితాలను లఘుఘటన (Elementary Events)లని అంటారు.

10.2.2 ఘటన (Event) : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములోని కొన్ని లఘుఘటనల సమితిని "ఘటన" అంటారు.

గమనిక : ఏ లఘుఘటన అయినా ఘటన అగును.

ఉదా : 1. బాగా కలిపిన పేక కట్ట నుంచి 3 పేక ముక్కలు తీస్తే, దానిని యాదృచ్ఛక ప్రయోగమనీ, ఒక ఆసు (Ace), ఒక రాజు (King), మరియు ఒక రాణి (Queen) రావడాన్ని ఘటన అని అంటాము.

2. ఒక నాణెమును ఎగరవేయుట యాదృచ్ఛిక ప్రయోగమని, దానిలో బొమ్మ లేదా బొరుసు రావటం ఒక ఘటన అంటాము.

3. ఒక పాచికను దొర్లించటం యాదృచ్ఛిక యత్నము అని, 1 గాని లేదా 2 గాని లేదా 3 గాని లేదా 4 గాని లేదా 5 గాని లేదా 6 గాని రావటాన్ని లఘుఘటన అనీ, సరిసంఖ్య (లేదా బేసి సంఖ్య వచ్చుట) ఘటనలనీ అంటాము.

గమనిక : ఒక పేక కట్టలోని 52 ముక్కలలో ఆఠీనులు, డైమండ్, కళావరు, స్పేడులను కలరులు అనిగాని సూట్సు అనిగాని అంటాము.

10.2.3 సమ సంభవ ఘటనలు (Equally Likely Events) : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో ఏ ఘటన జరగటానికైనా ఒకే విధమైన అవకాశము ఉంటే అటువంటి ఘటనలను సమసంభవ ఘటనలని అంటారు.

ఉదా : 1. ఒక పేక కట్ట నుంచి ఒక పేక ముక్కను తీసినపుడు అది ఏ ముక్క అయిననూ కావచ్చు. ఈ ప్రయోగంలో సమ సంభవాలయిన 52 లఘు ఘటనలున్నాయి.

2. ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు 1 నుంచి 6 వరకు వచ్చే లఘు ఘటనలు సమసంభవాలు.

10.2.4 పూర్ణ ఘటనలు (Exhaustive Events) : ఒక ప్రయోగంలోని అవకాశమున్న అన్ని ఘటనలను ఆ ప్రయోగములోని పూర్ణ ఘటనలు అని అంటాం. ఆ ఘటనల జాబితాను ఫలితాల పూర్ణఘటనల జాబితా (List of Exhaustive Events) అని అంటాము.

ఉదా : ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు ఫలితాల పూర్తి జాబితాలో 6 లఘుఘటనలు ఉంటాయి.

10.2.5 పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు (Mutually Exclusive Events) : ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలోని ఘటనలలో ఒక్కటైనా జరగటం మిగిలిన ఘటనలు జరగటాన్ని నిరోధించినట్లయితే ఆ ఘటనలను పరస్పర వివర్జిత ఘటనలని అంటాము.

ఉదా : 1. ఒక పాచికను దొర్లించినపుడు 1 నుంచి 6 వరకు వచ్చు లఘు ఘటనలు పరస్పర వివర్జిత లఘుఘటనలు.

ఎందుకంటే 5 అనే లఘుఘటన సంభవిస్తే మిగతా లఘుఘటనలు 1 గాని లేదా 2 గాని లేదా 3 గాని లేదా 4 గాని లేదా 6 గాని సంభవించవు.

2. ఒక పేక కట్ట నుంచి ఒక పేకముక్కను తీసిన, అవి "ఒక డైమండ్ ముక్క అయ్యే ఘటన", " ఆ ముక్క కళావరు ముక్క అయ్యే ఘటన"లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు.

3. 3 నాణెములను ఎగురవేసిన వానిపై కనీసము 2 బొమ్మలు రాని లఘుఘటనలు 4. అవి (T,T,H), (T,H,T), (H,T,T), (T,T,T) అను సమసంభవ లఘుఘటనలు.

4. ఒకేసారి ఒక నాణెమును, ఒక పాచికను విసరిన, బొమ్మ మరియు సరిసంఖ్య వచ్చు లఘుఘటనలు $(H,2),(H,4),(H,6)$ అవి సమసంభవాలు మరియు పరస్పర వివర్జితాలు.

10.2.6 పరస్పర స్వతంత్ర ఘటనలు (Mutually Independent Events) :

అనేక సార్లు జరుపగలిగిన ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో ముందు జరిగిన సంఘటనలు తరువాత జరుగబోయే ఘటనలపై ఎటువంటి ప్రభావం చూపించకపోతే, అటువంటి ఘటనలను పరస్పర స్వతంత్ర ఘటనలు అంటాం. ఉదా : (1) రెండు నాణాలను ఒకేసారి ఎగురవేసినపుడు మొదటిదాని మీద బొమ్మ పడవచ్చు. రెండవ దాని మీద బొమ్మ గాని, బొరుసు గాని పడవచ్చు. మొదటి నాణెంతో జరిగిన ఘటన రెండవ నాణెంతో జరుగబోయే ఘటనలపై ఎటువంటి ప్రభావం చూపించదు. అందువల్ల ఈ రెండు నాణేలతో జరుగబోయే ఘటనలు పరస్పర స్వతంత్ర ఘటనలు అవుతాయి.

10.2.7. శాంపుల్ ఆవరణము, శాంపుల్ బిందువులు : ఒక యత్నంలో వచ్చే ఫలితాలన్నిటి సమితిని శాంపుల్ ఆవరణము అంటాము. దీనినే Sతో సూచిస్తాము.

శాంపుల్ ఆవరణము Sలోని మూలకాలను శాంపుల్ బిందువులు అంటాము.

ఉదా : ఒక నాణెం ఎగురవేసే యత్నంలో శాంపుల్ ఆవరణము = $\{H,T\}$

10.3 సంభావ్యత స్వీకృతాలు (Axioms of Probability) :

సంభావ్యతను కనుక్కోవటానికి స్వీకృతాలను 1933లో కాల్మొగరావ్ (A.N Kolmogov) ప్రతిపాదించారు. సంభావ్యతా భావన క్రింది స్వీకృతాల మీద ఆధారపడుతుంది.

(1) ఏ ఘటనకైనా సంభావ్యత 0, 1 వ్యాప్తిలో వుంటుంది. ఒక ఘటన జరగటానికి వీలులేకపోతే, దాని సంభావ్యత 'సున్న'.

ఉదా : ఒక వ్యక్తి ఎల్లకాలం జీవించటానికి సంభావ్యత సున్న.

ఆ ఘటన ఖచ్చితంగా జరిగేదయితే దాని సంభావ్యత 1 అవుతుంది.

(2) మొత్తం శాంపుల్ ఆవరణానికి సంభావ్యత 1. $P(S)=1$

ఉదా : ఎప్పటికైనా మరణించటం తథ్యం కాబట్టి, దాని సంభావ్యత 1 అవుతుంది.

(3) A, B లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలైతే, A గాని, B గాని జరగటానికి సంభావ్యతను $P(AUB)$ తో సూచిస్తాం.

$$P(AUB) = P(A)+P(B)$$

10.4 సంభావ్యత సాంప్రదాయ నిర్వచనము (Classical Definition of Probability) :

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగ ఫలితాల జాబితాలో n పరస్పర వివర్జిత సమసంభవ లఘుఘటనలున్నవని అనుకోండి. ఆ ప్రయోగంలో E ఒక ఘటన అనుకోండి. E కి అనుకూలంగ m లఘు ఘటనలుంటే $(m \le n)$. ఆ ఘటన E యొక్క సంభావ్యత, $P(E)$ ని $P(E) = m/n$ అని నిర్వచిస్తారు.

$$P(E) = \frac{E \text{ లోని లఘుఘటనల సంఖ్య}}{\text{ప్రయోగంలోని మొత్తం లఘుఘటనల సంఖ్య}}$$

$$P = P(E) = \frac{m}{n}$$

E జరగకపోవటమనే ఘటనను $\overline{E}$ ఘటనగా భావిస్తే, $\overline{E}$ లో $n-m$ లఘుఘటనలు ఉండును, కాబట్టి

$$q = P(\overline{E}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(E)$$

$$\therefore P(E) + P(\overline{E}) = 1$$

$$P + q = 1$$

గమనిక : (1) $0 \le m \le n \Rightarrow 0 \le \frac{m}{n} \le 1 \Rightarrow 0 \le P \le 1$

q కూడా సంభావ్యతే కాబట్టి $1 \le q \le 1$.

(2) $p+q=1$ అంటే $p(E)+p(E)=1$

(3) ఒక ఘటన E జరగటానికి ఉండే నిష్పత్తి $a:b$ ని odds in favour of అంటాము.

$$P(E) = \frac{a}{a+b}, \; P(\overline{E}) = \frac{b}{a+b}$$

10.5 ఉదాహరణలు :

ఉదా : 10.5.1 : ఒక సంచిలోని 20 నలుపు, 30 తెలుపు బంతుల నుంచి ఒక బంతిని యాదృఛ్ఛికంగా తీస్తే, అది నలుపు బంతి కావటానికి సంభావ్యత ఎంత?

జవాబు : సంచిలో మొత్తం బంతుల సంఖ్య = 20 + 30 = 50

నలుపు బంతుల సంఖ్య = 20

ఒక బంతిని సంచిలో నుంచి తీసినపుడు నలుపు బంతి కావటానికి సంభావ్యత

$$p = \frac{\text{అనుకూల ఘటనల సంఖ్య}}{\text{మొత్తము సమసంభవ ఘటనల సంఖ్య}} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5}$$

నలుపు బంతి రాకపోవటానికి సంభావ్యత, $q=\frac{30}{50}=\frac{3}{5}$

$$p+q=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=1$$

ఉదా : 10.5.2 : ఒకసారి నాణేన్ని ఎగురవేసినపుడు బొమ్మ పడటానికి సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : ఒక నాణేన్ని ఎగురవేసినపుడు రెండే రెండు ఘటనలు జరుగుతాయి. అవి బొమ్మ (H) లేక బొరుసు (T).

బొమ్మ వచ్చే ఘటనను E అనుకుందాం.

అనుకూల ఘటనల సంఖ్య, $m=1$

మొత్తం ఘటనల సంఖ్య, $n=2$

$\therefore$ సంభావ్యత, $P(E)=\frac{m}{n}=\frac{1}{2}$

ఉదా : 10.5.3 : **ఎ)** రెండు నాణేలను ఒకేసారి ఎగురవేసినపుడు రెండు బొమ్మలు పడటానికి సంభావ్యత ఎంత ?

బి) కనీసం ఒక బొమ్మ పడటానికి సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : (ఎ) రెండు నాణేలను ఒకేసారి ఎగురవేసినపుడు మనకు వచ్చే ఘటనలు

HH : రెండు నాణేలతోనూ బొమ్మ పడటం

HT : మొదటి నాణెంతో బొమ్మ, రెండవ నాణెంతో బొరుసు పడటం

TH : మొదటి నాణెంతో బొరుసు, రెండవ నాణెంతో బొమ్మ పడటం

TT : రెండు నాణేలతోనూ బొరుసు పడటం.

$$\therefore m=4$$

ఈ నాలుగు ఘటనలలోనూ అనుకూల ఘటనల సంఖ్య $m=1$,

మొత్తం ఘటనల సంఖ్య, $n=4$.

రెండు నాణేలతోనూ బొమ్మ వచ్చే ఘటన, E అనుకుందాం.

$$P(E)\frac{m}{n}=\frac{1}{4}$$

(బి) కనీసం ఒక బొమ్మ పడాలంటే HT, TH, HH లన్ని అనుకూల ఘటనలు. కాబట్టి $m=3$.

కనీసం ఒక బొమ్మ వచ్చే ఘటనను A అనుకుందాం.

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{4}$$

ఉదా : 10.5.4 : రెండు పాచికలను విసిరిన, రెండవ పాచికపై ఎల్లప్పుడు **4** కంటే ఎక్కువ సంఖ్య వచ్చు ఘటనకు సంభావ్యత ఎంత**?**

జవాబు : రెండు పాచికలను విసిరిన, వానిపై వచ్చు సంఖ్యాయుగ్మముల మొత్తము సంఖ్య $n=6\times6$.

మొదటి పాచికపై **1** లేక **2** లేక **3** లేక **4** లేక **5** లేక **6** వచ్చు మరియు రెండవ పాచికపై **5** లేక **6** వచ్చు ఘటన E అనుకోండి.

అనుకూల ఘటనలు **1, 5; 2, 5; 3, 5; 4, 5; 5, 5; 6, 5**

1, 6; 2, 6; 3, 6; 4, 6; 5, 6; 6, 6;

కాబట్టి $m=6\times2=12$

$$p(E)=\frac{m}{n}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

ఉదా : 10.5.5 : పేక నుంచి ఒక కార్డును తీసినపుడు అది కళావరు కావడానికి సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జవాబు : పేక నుంచి ఏ కార్డునైనా తీసే ఘటనల సంఖ్య, $n=52$

పేక నుంచి కళావరును తీసే ఘటనను A అనుకుందాం.

కళావరు వచ్చే అనుకూల ఘటనల సంఖ్య, $m=13$

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

10.6 ప్రస్తారాలు (Permutation) :

రెండు ఉద్యోగ ఖాళీలకు, 3 గురు అభ్యర్థులు పోటీ పడితే వారిలో ఇద్దరిని ఎంపిక చేసి ఈ క్రింది విధములుగా అమర్చవచ్చును. అభ్యర్థులు A, B, C అని సూచిద్దాము. ఖాళీలు 1, 2 అని అనుకుందాము.

1	2
A	B
B	A
B	C
C	B
A	C
C	A

అమర్చవలసిన వస్తువులు, లభ్యమవుతున్న ఖాళీలు అధికమవుతున్న కొద్దీ వీటిని కొన్ని సూత్రముల ద్వారా తెలపవచ్చును. వీటినే ప్రస్తారాలు అంటారు.

n వస్తువులలో నుంచి r వస్తువులను క్రమంలో తీసుకొని అమర్చే విధానాన్ని ప్రస్తారము అంటారు.

n వస్తువులలో నుంచి r వస్తువులను తీసుకొని అమర్చే విధానాల సంఖ్యను ప్రస్తారాల సంఖ్య అంటారు. దీనినే n_{p_r} తో గుర్తిస్తాము.

$$n_{p_r} = \frac{n!}{(n-r)!},\ r \le n$$ మరియు r, n లు ధన పూర్ణాంకాలు.

గమనిక : $n! = n(n-1)(n-2).....1$, n ధన పూర్ణాంకము.

$n! = n(n-1)!$

ఉదా : 1. $9! = 9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$

$1! = 1$

$0! = 1$

2) $4_{p_3} = \frac{4!}{1!} = 4.3.2.1 = 24$

సంయోగాలు (Combinations) :

n వస్తువుల సముదాయం నుంచి r వస్తువులను ఎన్నుకోవడాన్ని సంయోగం అంటారు.

ఈ సంయోగాల సంఖ్యను n_{c_r} తో సూచిస్తారు.

$$n_{C_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

ఉదా : $5_{C_3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\times4}{2} = 10$

ఉదా - 6 : లీపు సంవత్సరంలో 53 ఆదివారాలు ఉండటానికి సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జవాబు : లీపు సంవత్సరంలో 53 ఆదివారాలు వచ్చే ఘటనను A అనుకుందాం. లీపు సంవత్సరములో 366 రోజులు అంటే 52 పూర్తి వారాలు వుండి, 2 రోజులు అధికంగా ఉంటాయి.

ఆ రెండు రోజులు ఈ క్రింది వాటిలో ఏవైనా కావచ్చును.

ఆదివారము, సోమవారము

సోమవారము, మంగళవారము

మంగళవారము, బుధవారము

బుధవారము, గురువారము

గురువారము, శుక్రవారము

శుక్రవారము, శనివారము

శనివారము, ఆదివారము

మొత్తము ఘటనల సంఖ్య, $n=7$

అనుకూల ఘటనల సంఖ్య, $m=2$

$\therefore$ సంభావ్యత $P(A)=\frac{2}{7}$

ఉదా - 7 : ఒక పెట్టెలో 2 ఎర్రని, 3 నీలంవి, 4 నల్లవి బంతులు కలవు. ఆ పెట్టె నుంచి యాదృచ్ఛికంగా 3 బంతులు తీసిన (1) మూడు బంతులు వేరు వేరు రంగులవి అగుటకు, (2) మూడు ఒకే రంగు కావటానికి సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జవాబు : (i) తొమ్మిది బంతులున్న పెట్టె నుంచి 3 బంతులను తీయగల విధముల సంఖ్య, $n=9_{C_3} = \frac{9!}{6!\,3!} = 84$

వేరు వేరు రంగులలో 3 బంతులను తీసే ఘటనను E_1 అనుకుందాం.

ఎర్రబంతిని 2 పద్ధతులలోను, నీలం బంతిని 3 పద్ధతులలోను మరియు నల్లబంతిని 4 పద్ధతులలోను తీయవచ్చును.

(ii) కాబట్టి 3 బంతులు ఒకే రంగువి అయ్యేటట్లు తీసుకునే ఘటనను E_2 అనుకోండి.

3 నీలం బంతులు ఒకే పద్ధతిలో తీయవచ్చు మరియు 3 నల్లబంతులు $4_{C_3} = 4$ పద్ధతులలో తీయవచ్చును.

3 బంతులు ఒకే రంగువి అయ్యేటట్లు తీసుకోవడానికి మొత్తం పద్ధతుల సంఖ్య, $m=1+4=5$

కావాల్సిన సంభావ్యత, $P(E_2)=\frac{m}{n}=\frac{5}{84}$

ఉదా : 8 : 100 పేజీల పుస్తకంలో యాదృచ్ఛికముగా తెరచిన పేజీలలో వచ్చు సంఖ్యలోని అంకములు మొత్తము 9 అయ్యే ఘటన సంభావ్యత ఎంత?

జవాబు : పుస్తకములో ఏ పేజీయైన వచ్చు మొత్తం ఘటనల సంఖ్య, $n=100$ పేజీలో వచ్చు సంఖ్యలోని అంకముల మొత్తము 9 అయ్యే ఘటన E అనుకోండి.

అలాంటి పేజీల సంఖ్యలు 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90

$\therefore$ అనుకూల ఘటనల సంఖ్య, $m=10$

$\therefore$ సంభావ్యత $p(E)=\frac{m}{n}=\frac{10}{100}$

ఉదా : 9 : ఒక తరగతిలో 10 బాలురు మరియు 5 బాలికలు కలరు. వారి నుంచి 4 విద్యార్థులతో ఒక కమిటీ ఏర్పరచిన, ఆ కమిటీలో కనీసం 3 బాలికలు ఉండు ఘటన సంభావ్యత కనుక్కోండి.

జవాబు : 15 మంది విద్యార్థుల నుంచి 4 విద్యార్థులతో కమిటీ ఏర్పరుచు విధముల సంఖ్య, $n=15_{C_4}=\frac{15!}{1!\ 4!}$

కమిటీలో కనీసం 3 బాలికలు ఉండు ఘటన E అనుకోండి. కనుక ఆ కమిటీలో 1 బాలుడు, 3 బాలికలు లేదా 4 బాలికలు ఉండవచ్చును. కమిటీ ఏర్పరచగల విధముల సంఖ్య,

$$m=10_{C_1}\times 5_{C_3}+5_{C_4}=100+5=105$$

$\therefore$ సంభావ్యత $P(E)=\frac{m}{n}=\frac{105}{15_{C_4}}$

ఉదా : 10 - ఒక సాధారణ పేక ముక్కల కట్ట నుంచి 4 ముక్కలను తీసిరి. అది వేర్వేరు కలరులకు చెందిన ముక్కలయ్యే ఘటన సంభావ్యత కనుక్కోండి.

జవాబు : పేక ముక్కల కట్ట నుంచి 4 ముక్కలను తీయు మొత్తము విధముల సంఖ్య $n=52_{C_4}$.

ప్రతి కలరు నుంచి ఒక ముక్క తీసే ఘటన E అనుకుందాం.

$\therefore E$ అనేది వేర్వేరు కలరుల నుంచి 4 ముక్కలు తీయు ఘటన.

E కి అనుకూలంగా ఉండు విధముల సంఖ్య, $m=13_{C_1}\times 13_{C_1}\times 13_{C_1}\times 13_{C_1}$

$$p(E)=\frac{m}{n}=\frac{13_{C_1}\times 13_{C_1}\times 13_{C_1}\times 13_{C_1}}{52_{C_4}}$$

ఉదా : 11 : ఒక వరుసలో 6 బాలురు మరియు 5 బాలికలను కూర్చుండబెట్టవలెను. ఏ ఇద్దరు బాలికలు ప్రక్క ప్రక్క కూర్చుండకుండుటకు వచ్చు ఘటన సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : మొత్తము 11 మందిని కూర్చుండబెట్టు విధముల సంఖ్య $n=11!$

6గురు బాలురు మరియు 5 బాలికలను ఒక వరుసలో నియమానుసారం కూర్చుండబెట్టు విధము GBGBGBGBGBGBG, B అనగా బాలుడు, G అనగా బాలిక. ఇందులో ఏ ఇద్దరు బాలికలు ప్రక్కప్రక్కన కూర్చొనరు.

ఈ ఘటనను E అనుకుందాం.

E కి అనుకూల ఘటనల సంఖ్య, $m=6!\,7_{p_5}$

సంభావ్యత, $P(E)=\frac{m}{n}=\frac{6!7_{p_5}}{11!}$

ఉదా : 12 : 4 ఇంగ్లీషు, 5 తెలుగు మరియు 3 హిందీ పుస్తకములను ఒక అలమరలో ఒక వరుసలో అమర్చిరి. ఒకే భాష పుస్తకములు ఒకే చోట ప్రక్క ప్రక్కన ఉండే అమరికకు సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : మొత్తం 12 పుస్తకములను వరుసలో అమర్చగలిగిన విధముల సంఖ్య $n=12!$. ఒకే భాష పుస్తకములు ఒకే చోట ప్రక్కప్రక్కన ఉండే ఘటనను E అనుకుందాం.

4 ఇంగ్లీషు పుస్తకములు అమర్చగలిగిన విధముల సంఖ్య = 4!

5 తెలుగు పుస్తకములు అమర్చగలిగిన విధముల సంఖ్య = 5!

3 హిందీ పుస్తకములు అమర్చగలిగిన విధముల సంఖ్య = 3!

3 భాషల పుస్తకములు విడివిడిగా కట్టలు కట్టి వాటిని అమర్చగలిగిన విధముల సంఖ్య = 3!

E కి అనుకూల ఘటనల సంఖ్య , m = 4! 5! 3! 3!

సంభావ్యత, $p(E)=\frac{m}{n}=\frac{4!\,5!3!3!}{12!}$

ఉదా : 13 : XYZ తయారు చేయు సంస్థలోని 1000 మంది ఉద్యోగుల వేతనములు పంపిణీ విధానమును ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది.

వేతనములు (రూ. లలో)	ఉద్యోగుల సంఖ్య	వేతనములు (రూ.లలో)	ఉద్యోగుల సంఖ్య
1200 - 1400	9	2000 - 2200	142
1400 - 1600	118	2200 - 2400	35

1600 - 1800	478	2400 - 2600	18
1800 - 2000	200		

పై గ్రూపు నుంచి ఒక వ్యక్తిని యాదృచ్ఛికముగా ఎన్నుకొనవలెను. (1) రూ. 1600 కంటే తక్కువ, (2) రూ. 2000 పైన, (3) రూ. 1600 నుంచి 2000 వరకు ఆ వ్యక్తి వేతనముగా పొందుటకు సంభావ్యత ఎంత?

జవాబు : 1000 మంది ఉద్యోగులలో ఏ ఒక్కరినైనా ఎన్నుకునే విధముల సంఖ్య $n = 1000$

(1) రూ. 1600 కంటే తక్కువ వేతనము పొందు ఘటనను A అనుకుందాం.

A అను ఘటనలో ఉద్యోగుల సంఖ్య = $m = 9 + 118 = 127$

సంభావ్యత, $p(A) = \frac{m}{n} = \frac{127}{1000}$

(2) రూ. 2000 పైన వేతనము పొందు ఘటనను B అనుకుందాం.

B అను ఘటనలో ఉద్యోగుల సంఖ్య $m = 142 + 35 + 18 = 195$

సంభావ్యత $p(B) = \frac{195}{1000}$

(3) రూ. 1600 నుంచి రూ. 2000 వరకు వేతనము పొందు ఘటనను C అనుకుందాం. C అను ఘటనలో ఉద్యోగుల సంఖ్య, $m = 478 + 200 = 678$

సంభావ్యత = $p(C) = \frac{678}{1000}$

ఉదా : 14 : 50 మంది ఉద్యోగులకు సంబంధించిన వయస్సు మరియు వేతనముల పట్టిక క్రింద ఇవ్వబడినది.

	వేతనము (రూ.లలో)				
వయస్సు సం॥లలో	2500 - 3000	3000 - 3500	3500 - 4000	4000 - 4500	మొత్తము
20 - 30	8	3	-	-	11
30 - 40	2	5	2	2	11
40 - 50	-	2	9	6	17
50 - 60	-	-	6	5	11
మొత్తము	10	10	17	13	50

(1) 30 - 40 సం॥ల వయస్సు వుండి రూ. 3500 కన్నా ఎక్కువ వేతనము

(2) 40 సం॥ల కన్నా తక్కువ వయస్సు వుండి రూ. 3000 - 3500 వేతనము వున్న ఉద్యోగిని యాదృచ్ఛికముగా ఎన్నుకోవడానికి గల సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : 50 శాతం మందిలో ఎవరినైనా ఎన్నుకొనే విధానాల సంఖ్య $n=50$

(1) 30 - 40 సంవత్సరాల వయస్సు వుండి రూ. 3500 కన్నా ఎక్కువ వేతనము గల ఉద్యోగిని ఎన్నుకునే ఘటనను E అనుకుందాము.

E కి అనుకూల విధముల సంఖ్య = $m=2+2=4$

$\therefore$ సంభావ్యత $P(E)=\frac{4}{50}=0.08$

(2) 40 సం॥ల కన్నా తక్కువ వయస్సు ఉండి రూ. 3000 - 3500 వేతనము ఉన్న ఉద్యోగిని ఎన్నుకొనే ఘటనను A అనుకొందాం.

A కి అనుకూల విధముల సంఖ్య $m=3+5=8$

సంభావ్యత, $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{8}{50}=0.16$

అభ్యాసము

1. ఒక సంచిలో 3 తెలుపు మరియు 5 నలుపు బంతులు కలవు. ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికముగా తీస్తే అది నలుపు బంతి అయ్యే ఘటన సంభావ్యత కనుక్కోండి. $\left[[.\frac{5}{8}\right]$

2. ఒక సంచిలో 5 తెలుపు, 7 నలుపు మరియు 4 ఎరుపు బంతులు కలవు. 3 బంతులను యాదృచ్ఛికముగా తీస్తే ఆ మూడు బంతులు తెలుపు బంతులయ్యే ఘటన సంభావ్యతను కనుక్కోండి. $\left[[.\frac{5_{C_3}}{16_{C_3}}\right]$

3. ఒక సౌష్ఠవ నాణెమును 3 సార్లు ఎగురవేసిన, ఒక బొమ్మ, రెండు అచ్చులు వచ్చుటకు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

$\left([.\frac{3_{C_1}\times 2_{C_2}}{2\times 2\times 2}\right)$

4. రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించినపుడు ఆ రెండు పాచికలపైన

ఎ. సరిసంఖ్యలు రావటానికి సంభావ్యత ఎంత?

బి. ఒకే రకమయిన అంకెలు పడుటకు సంభావ్యత ఎంత? $\left([.Z\frac{3\times 3}{6\times 6},a.\frac{6}{6\times 6}\right)$

5. ఒక పేక ముక్కల కట్ట నుంచి 3 కార్డులను తీసిన ఆ కార్డులు ఆసు, రాజు, రాణి అగు ఘటనకు సంభావ్యతను కనుక్కోండి? $\left([.\frac{4_{C_1}\times 4_{C_1}\times 4_{C_1}}{52_{C_3}}\right)$

6. ఆరుగురు బాలురు, ఆరుగురు బాలికలు యాదృచ్ఛికంగా ఒక వరుసలో కూర్చున్నారు.

   1. ఆ ఆరుగురు బాలికలు కలిసి కూర్చుండుటకు

   2. బాలురు బాలికలు ఒకరి తరువాత ఒకరు కూర్చుండుటకు సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

$\left([\,.(1)\ \frac{7!6!}{12!} \quad (2)\ \frac{2!\,6!\,6!}{12!} \right)$

7. ఆరుగురు పురుషులు మరియు నలుగురు మహిళలతో ఐదుగురు సభ్యులు గల కమిటీ ఏర్పాటు చేయబడింది. ఈ కమిటీ ఏర్పాటు చేయుటకు ఎల్లప్పుడూ కనీసము ఒక మహిళ కమిటీలో ఉండుటకు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

$\left([\,.1 - \frac{6_{C_5}}{10_{C_5}} \right)$

8. ఒక సాధారణ సంవత్సరంలో 53 సోమవారములు ఉండు ఘటనకు సంభావ్యత ఎంత?

$\left([\,.\frac{1}{7} \right)$

9. ఒక లీపు సంవత్సరములో 52 సోమవారములు మరియు 53 మంగళవారములు ఉండు ఘటనకు సంభావ్యత ఎంత?

$\left([\,.\frac{1}{7} \right)$

10. 100 పేజీలు కలిగిన పుస్తకమును యాదృచ్ఛికముగా ఒక పేజి తెరచిన దానిపై వచ్చు సంఖ్యలో ఒకే అంకములు ఉండు ఘటన సంభావ్యత ఎంత? $\left([\,.\frac{9}{100} \right)$

10.7 సంభావ్యత సంకలన సిద్ధాంతము (Addition Theorem on Probability):

1. S అనే శాంపుల్ ఆవరణంలో E_1, E_2 అనేవి ఏవేని ఘటనలయితే అప్పుడు

   $p(E_1$ ..È¥ $E_2) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

2. S అనే శాంపుల్ ఆవరణంలో A, B, C లు ఏవేనీ ఘటనలయితే,

   $p(A$ ..È¥ B ..È¥ $C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

3. S అనే శాంపుల్ ఆవరణంలో A,B లు రెండు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలైతే, $P(A$ ..È¥ $B) = P(A \cup B) = P(A)+P(B)$

$$\{\because A \cap B = \phi \Rightarrow P(A \cap B) = 0\}$$

4. S అనే శాంపుల్ ఆవరణంలో A, B లు రెండు పరస్పర స్వతంత్ర ఘటనలయితే

$P(A$ =ी † Ç$B) = P(A \cap B) = P(A).P(B)$

ఉదా : 1 : ఒక పేక ముక్కల కట్ట నుంచి 2 కార్డులను తీసిన ఆ రెండు ఎర్రవి అగుటకు లేదా రాజులు అగుటకు సంభావ్యత ఎంత?

జవాబు : ఒక పేక ముక్కల కట్ట నుంచి కార్డులను తీసిన ప్రయోగము యొక్క శాంపుల్ ఆవరణము S అనుకోండి.

తీసిన ఆ రెండు కార్డులు ఎర్రవి అయ్యే ఘటన E_1 అనుకోండి.

E_1 కి అనుకూల ఘటనల సంఖ్య = ${}^{26}C_2$

తీసిన ఆ రెండు కార్డులు రాజులు అయ్యే ఘటన E_2 అనుకోండి

E_2 కి అనుకూల ఘటనల సంఖ్య = ${}^{4}C_2$

$\therefore$ తీసిన ఆ రెండు కార్డులు రాజులు ఎర్రవిగా తీసే ఘటన $E_1 \cap E_2$ అగును.

$E_1 \cap E_2$ కి అనుకూల విధముల సంఖ్య = ${}^{2}C_2 = 1$

$$P(E_1) = \frac{{}^{26}C_2}{{}^{52}C_2} \quad P(E_2) = \frac{{}^{4}C_2}{{}^{52}C_2}, P(E_1 \cap E_2) = \frac{{}^{2}C_2}{{}^{52}C_2}$$

$\therefore$ ఆ రెండు కార్డులు ఎర్రవి కాని రెండు రాజులు కాని అగుటకు సంభావ్యత = $P(E_1 \cup E_2)$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= \frac{{}^{26}C_2}{{}^{52}C_2} + \frac{{}^{4}C_2}{{}^{52}C_2} - \frac{{}^{2}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{55}{221}$$

ఉదా : 2 : రెండు పాచికలను విసిరినపుడు, ఆ రెండు పాచికలపై వచ్చు సంఖ్యల మొత్తం 10 లేక 11 వచ్చుటకు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జవాబు : రెండు పాచికలు విసిరితే వచ్చు శాంపుల్ ఆవరణం S అనుకోండి.

S లో ఘటనల సంఖ్య, $n(S) = 6 \times 6$

రెండు పాచికలను విసిరినపుడు 10 వచ్చు ఘటన E_1 అనుకోండి.

$$n(E_1) = 3, E_1 = \{(4,6), (5,5), (6,4)\}$$

రెండు పాచికలు విసిరినప్పుడు 11 వచ్చు ఘటన E_2 అనుకోండి.

$E_2=\{(5,6),(6,5)\}, n(E_2)=2$

మొత్తము 10 లేక 11 వచ్చు ఘటన = $E_1 \cup E_2$ మరియు $E_1 \cap E_2 = \phi$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{3}{6\times 6} + \frac{2}{6\times 6} = \frac{5}{36}.$$

ఉదా : 3 : ఒక సంచిలో 4 ఆకుపచ్చని, 6 నల్లవి, 7 తెల్లవి బంతులున్నాయి. ఆ సంచి నుంచి ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీసుకున్న ఆ బంతి ఆకుపచ్చది కాని లేక నల్లది కాని అగుటకు సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : 4 ఆకుపచ్చని, 6 నల్లని, 7 తెల్లని బంతులు గల ఒక సంచిలో నుంచి ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీసిన ప్రయోగమునకు శాంపుల్ ఆవరణము S అనుకోండి. $n(S)=17_{C_1}=17$

తీసిన బంతి ఆకుపచ్చనిది అయ్యే ఘటన E_1 అనుకోండి మరియు నల్లది అయ్యే ఘటన E_2 అనుకోండి.

$n(E_1) = 4_{C_1} = 4, \qquad n(E_2) = 6_{C_1} = 6$

$P(E_1)=\frac{4}{17}, \qquad P(E_2)=\frac{6}{17}$

E_1, E_2 లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు అనగా $E_1 \cap E_2 = \phi$

ఆకుపచ్చ బంతి కాని లేక నల్లబంతి కాని తీయుటకు సంభావ్యత

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) = \frac{4}{17} + \frac{6}{17} = \frac{10}{17} \{\because P(E_1 \cap E_2) = 0\}$$

ఉదా : 4 : బాగా కలిపిన పేక ముక్కల కట్ట నుంచి కార్డులను తీస్తే ఆ రెండు కార్డులలో కనీసం ఒక్కటయిన ఆఠీను కార్డు అగుటకు సంభావ్యత కనుక్కోండి.

జవాబు : ఒక పేక ముక్కల కట్ట నుంచి 2 కార్డులను తీసిన ప్రయోగమునకు శాంపుల్ ఆవరణము S అనుకోండి.

$n(S)=52_{C_2}$

తీసిన ఆ రెండు కార్డులలో మొదటి కార్డు ఆఠీను అయ్యే ఘటనను E_1 మరియు రెండవ కార్డు ఆఠీను అయ్యే ఘటనను E_2 అని అనుకోండి.

రెండు కార్డులు ఆఠీనులు అయ్యే ఘటన $E_1 \cap E_2$ అయితే కనీసం ఒక కార్డు ఆఠీను అయ్యే ఘటన $E_1 \cup E_2$ అవుతుంది.

$P(E_1) = \frac{13}{52}, \qquad P(E_2) = \frac{13}{52}$

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{^{13}C_2}{^{52}C_2} = \frac{13.12}{52.51} = \frac{1}{17}$$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{13}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{17} = \frac{15}{34}$$

ఉదా : 5 : ఒక నగరము నుంచి A, B, C అను 3 పత్రికలను ప్రచురించుచున్నారు. A పత్రికను 20%, B పత్రికను 16%, C పత్రికను 14%, A మరియు B పత్రికలను 8%, A మరియు C పత్రికలను 5%, B మరియు C పత్రికలను 4% మరియు A, B, C మూడు పత్రికలను 2% చదువుతారు. ప్రజలలో కనీసము ఒక పత్రికనైననూ ఎంత శాతము చదువుతారు ?

జవాబు : $P(A) = \frac{20}{100}, P(B) = \frac{16}{100}, P(C) = \frac{14}{100}, P(A \cap B) = \frac{8}{100}$

$$P(A \cap C) = \frac{5}{100}, P(B \cap C) = \frac{4}{100}, P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{100}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= \frac{20}{100} + \frac{16}{100} + \frac{14}{100} - \frac{8}{100} - \frac{5}{100} - \frac{4}{100} + \frac{2}{100}$$

$$= \frac{35}{100}$$

$\therefore$ ప్రజలలో కనీసము ఒక పత్రికనైనా చదువు శాతము = $\frac{35}{100} \times 100 = 35$

ఉదా : 6 : ఒక నాణెము మరియు ఒక పాచిక ఎగురవేసిరి. నాణెముపై బొరుసు వచ్చుట మరియు పాచికపై సరిసంఖ్య వచ్చుట అనే ఘటన A అయిన A కు అనుకూలంగా ఉన్న శాంపుల్ బిందువుల సమితిని వ్రాయండి.

జవాబు : నాణెముపై బొరుసును T తో సూచిద్దాము.

పాచికపై సరిసంఖ్యలు 2, 4, 6

నాణెముపై బొరుసు వచ్చుట మరియు పాచికపై సరిసంఖ్య వచ్చు ఘటన A.

$$A = \{(T,2), (T,4), (T,6)\}$$

ఉదా : 7 : A ఒక లక్ష్యాన్ని కొట్టడానికి 5 సార్లు ప్రయత్నిస్తే 4 సార్లు విజయుడు అవుతాడని తెలుసు. B ఆ లక్ష్యాన్ని కొట్టడానికి 4 సార్లు ప్రయత్నిస్తే 3 సార్లు విజయుడవుతాడని తెలుసు. ఇద్దరూ ప్రయత్నించినపుడు లక్ష్యాన్ని కొట్టడానికి సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : A లక్ష్యాన్ని కొట్టడానికి సంభావ్యత, $P(A) = \frac{4}{5}$

B లక్ష్యాన్ని కొట్టడానికి సంభావ్యత $P(B)=\frac{3}{4}$

A, B లు ఇద్దరూ లక్ష్యాన్ని కొట్టడానికి అవకాశం ఉంది కాబట్టి, అవి పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు కావు. A, B లు ఇద్దరూ లక్ష్యాన్ని కొట్టడానికి సంభావ్యత

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{4}{5}+\frac{3}{4}-\frac{3}{5}=0.95$$

ఉదా : 8 : ఒక సంచిలో 1 నుంచి 30 వరకు నంబర్లు వేసిన 30 బంతులున్నాయి. ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీశాం. తీసిన బంతి నంబరు 5 గుణిజం కాని, 9 గుణిజం కాని అయ్యే సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : సంఖ్య 5 గుణిజం అయ్యే ఘటన A అనుకుందాం.

$$A=\{5,10,15,20,25,30\},\ n(A)=6$$

$$P(A)=\frac{6}{30}$$

సంఖ్య 9 గుణిజం అయ్యే ఘటన B అనుకుందాం.

$$B=\{9,18,27\},\quad n(B)=3$$

$$P(B)=\frac{3}{30}$$

ఇక్కడ A, B లు రెండు ఘటనలు పరస్పర వివర్జితాలు కాబట్టి

$$P(A\cap B)=0$$

$\therefore$ సంఖ్య 5 యొక్క గుణిజం కాని, 9 గుణిజం కాని అవటానికి సంభావ్యత

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{6}{30}+\frac{3}{30}=\frac{9}{30}=\frac{3}{10}$$

ఉదా : 9 : ఒక వ్యక్తి కింది గుణాలు గల ఒక కన్యను వివాహం చేసుకోవాలనుకుంటాడు. (1) తెల్లగా ఉండాలి - దీనికి సంభావ్యత $\frac{1}{25}$. (2) కట్నం బాగా తీసుకురావాలి - దీనికి సంభావ్యత $\frac{1}{50}$ (3) మంచి గుణాలు కలిగి కలుపుగోలుగా వుండాలి - దీనికి సంభావ్యత $\frac{1}{1000}$.

పై మూడు స్వతంత్ర గుణాలయినప్పుడు, ఆ గుణాలున్న కన్య ఆ వ్యక్తికి వధువుగా దొరకడానికి సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : కన్య తెల్లగా ఉండడానికి సంభావ్యత = $\frac{1}{25}$

బాగా కట్నం తేవడానికి సంభావ్యత = $\frac{1}{50}$

సద్గుణాలు కలిగి వుండడానికి సంభావ్యత = $\frac{1}{1000}$

పై మూడు స్వతంత్ర ఘటనలు కాబట్టి, అవి సమకాలికంగా జరగడానికి సంభావ్యత = $\frac{1}{25}\times\frac{1}{50}\times\frac{1}{1000} = 0.0000008$

గమనిక : ఒక ఘటనైనా కనీసం జరగటానికి సంభావ్యత

= **1** - ఏ ఘటనా జరగకపోవడానికి సంభావ్యత

ఉదా : 10 : A, B, C, D, E అనే **5** విద్యార్థులకు ఒక సమస్య ఇవ్వబడింది. వారు ఆ సమస్యను సాధించే సంభావ్యతలు $\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{2}$. ఆ సమస్య సాధించటానికి సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : A సమస్యను సాధించలేక పోవటానికి సంభావ్యత = $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

B సమస్యను సాధించలేక పోవటానికి సంభావ్యత = $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

C సమస్యను సాధించలేక పోవటానికి సంభావ్యత = $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

D సమస్యను సాధించలేక పోవటానికి సంభావ్యత = $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

E సమస్యను సాధించలేక పోవటానికి సంభావ్యత = $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

ఈ ఘటనలన్నీ స్వతంత్ర ఘటనలు కాబట్టి, **5** విద్యార్థులు సమస్యను సాధించలేకపోవటానికి సంభావ్యత $=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$\therefore$ సమస్యను సాధించడానికి సంభావ్యత = $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

అభ్యాసము

1. ఒక సంచిలో 4 తెలుపు, 3 నలుపు, 5 ఎరుపు బంతులున్నాయి. యాదృచ్ఛికంగా ఒక బంతిని తీస్తే, అది తెలుపు లేదా నలుపు బంతి అవటానికి సంభావ్యత ఎంత ?

(జవాబు : $\frac{7}{12}$)

2. ఒక పేక ముక్కల కట్ట నుంచి 2 కార్డులను యాదృచ్ఛికంగా తీసినా ఆ రెండు కార్డులు స్పేడు లేక రెండు రాణి అయ్యే సంభావ్యత కనుక్కోండి.

(జవాబు : $\frac{14}{221}$)

3. ఒక సంచిలో 5 నల్ల బంతులు కలవు. ఆ సంచి నుంచి 3 బంతులు తీయుప్రయోగమునకు శాంపుల్ బిందువుల సంఖ్య వ్రాయండి.

(జవాబు : ${}^{5}C_{3}$)

4. రెండు పాచికలను ఒకేసారి విసిరిన వానిపై వచ్చు సంఖ్యల మొత్తము 10 అయ్యే ఘటన సంభావ్యత కనుక్కోండి.

(జవాబు : $\frac{3}{6\times6}$)

5. ఒక పేక ముక్కల కట్ట నుంచి యాదృచ్ఛికంగా ఒక కార్డును తీసిన ఆ కార్డు రాజుగాని, రాణి కాని అగుటకు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

(జవాబు : $\frac{4}{52}+\frac{4}{52}$)

10.8 నియత ఘటన (Conditional Event) :

S అనే శాంపుల్ ఆవరణములో E_1, E_2 లు రెండు ఘటనలైతే మరియు E_1 జరిగినప్పుడు E_2 సంభవము అనే ఘటనను నియత ఘటన అంటారు. దీనిని $\frac{E_2}{E_1}$ తో సూచిస్తాం. ఇలాగే $\frac{E_1}{E_2}$ నకు కూడా అర్థం చెప్పుకోతగును.

ఉదా : రెండు నాణెములు ఎగురవేసిరి. ఒక బొరుసు వచ్చు ఘటన జరిగిందని తెలిసినపుడు వానిపై రెండు బొరుసులు వచ్చు ఘటనను నియత ఘటన అంటారు.

10.9 నియత సంభావ్యత (Condtional Probability) :

నిర్వచనము : S అనే శాంపుల్ ఆవరణలో E_1, E_2 లు 2 ఘటనలై మరియు $P(E_1) \neq \phi$ అయితే "E_1 జరిగినప్పుడు E_2 సంభవం''. అనే ఘటన సంభావ్యతను నియత సంభావ్యత అని అంటారు. మరియు దీనిని $P\left[\frac{E_2}{E_1}\right]$ అని వ్రాసి $P\left[\frac{E_2}{E_1}\right] = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$ గా నిర్వచిస్తారు. దీనినే "షరతు సంభావ్యత లేదా సాపేక్ష సంభావ్యత'' అంటారు.

10.10. సంభావ్యత లబ్ద సిద్ధాంతం (Multiplication Theorem of Probability (or) Theorem on Compound Probability) :

ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో E_1, E_2 లు రెండు ఘటనలై మరియు $P(E_1) \neq 0,\ P(E_2) \neq 0$ అయితే అప్పుడు $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)\, P\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$

ఉదా : 2 : రెండు పాచికలను ఒకేసారి దొర్లించినచో వానిపై వచ్చు చుక్కల మొత్తము 8. వానిలో ఒక దానిపై 3 చుక్కలు వచ్చు ఘటన సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : రెండు పాచికలు ఒకేసారి దొర్లించిన వానిపై వచ్చు చుక్కల మొత్తముతో వచ్చు శాంపిల్ ఆవరణము S అనుకోండి.

$\therefore\ n(S) = 6 \times 6$ వానిపై వచ్చు చుక్కల మొత్తము 8 అయ్యే ఘటన E_1 అనుకోండి.

$\therefore n(E_1) = S\left(\because E_1 = \{(2,6)(3,5),(4,4)(5,3)(6,2)\}\right)$

ఏదైనా ఒక పాచికపై 3 వచ్చు ఘటన E_2 అనుకోండి.

$\therefore n(E_1 \cap E_2) = 2\ \left(\because E_1 \cap E_2 = \{(3,5),\ (5,3)\}\right)$

$$\therefore P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{P(E_2 \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{21(6\times6)}{51(6\times6)} = \frac{2}{5}$$

ఉదా : 3 : ఒక కప్పులో 10 ముక్కలు కలవు. వానిలో 4 ఎర్రరంగువి మరియు 6 నీలపు రంగువి. ఆ కప్పులో నుంచి 2 ముక్కలను ఒక దాని తరువాత ఒకటి తీసిన ముక్కను తిరిగి చేర్చకుండా తీసిన మొదట ఎర్రది మరియు 2వది నీలంది అయ్యే ఘటన సంభావ్యత కనుక్కోండి.

జవాబు : మొదటిసారి తీసిన ముక్క ఎర్రది అయ్యే ఘటన E_1 అనుకోండి. దానిని తిరిగి కప్పులో చేర్చలేదు. అప్పుడు మరలా ఒక ముక్కను తీసిరి. రెండవసారి తీసిన ముక్క నీలంది అయ్యే ఘటన E_2 అనుకోండి.

$$\therefore P(E_1) = \frac{4}{10} \text{ మరియు } \therefore P(E_2) = \frac{6}{9} \text{ కాబట్టి } P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{4}{10}\ \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

గమనిక - 1 : లబ్ద సిద్ధాంతములను E_1, E_2, E_3 ఘటనలను విస్తరించి :

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P\left(\frac{E_2}{E_1}\right)P\left(\frac{E_3}{E_1 \cap E_2}\right)$$

ఈ సిద్ధాంతము **4** లేదా అంతకంటే ఎక్కువ ఘటనలకు వర్తించవచ్చు.

గమనిక - 2 : A, B $= (\neq 0)$లు రెండు ఘటనలు అయితే $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A)P\left(\frac{B}{A}\right)$.

ఉదా : 4 : ఒక సంచిలో **4** ఎర్రవి మరియు **6** నీలంవి బంతులు కలవు. రెండవ సూచిలో **4** నీలం మరియు **6** ఆకుపచ్చ బంతులు కలవు. ఆ సంచులలో ఒక్కొక్క దాని నుంచి ఒక బంతి తీసిన వానిలో ఒకటి ఎర్రనిది మరియు ఇంకొకటి ఆకుపచ్చనిది అయ్యే ఘటన సంభావ్యత కనుక్కోండి **?**

జవాబు : 4 ఎర్రవి, **6** నీలం బంతులు కల ఒక సంచి నుంచి **1** ఎర్రబంతిని తీయు ఘటన E_1 అనుకోండి.

$$\therefore P(E_1) = \frac{4}{10}$$

4 నీలంవి, **6** ఆకుపచ్చ బంతులు కల సంచి నుంచి **1** ఆకుపచ్చ బంతిని తీయు ఘటన E_2 అనుకోండి.

$$\therefore P(E_2) = \frac{6}{10}$$

$$\therefore P(E_1 \cap E_2) = P(E_2) = \frac{4}{10}, \frac{6}{10} = 0.24 \quad (\because\ E_1, E_2 \text{ స్వతంత్ర ఘటనలు})$$

ఉదా : 5 : ఒక పాచికను దొర్లించి మరియొక నాణెమును ఎగురవేసిరి. పాచికపై కనీసము **5** వచ్చుట మరియు నాణెముపై బొరుసు వచ్చు ఘటన మరియు నాణెముపై బొమ్మ వచ్చు ఘటన స్వతంత్ర ఘటనలు అవుతాయేమో తెలపండి.

జవాబు : పాచికను దొర్లించు మరియు నాణెమును ఎగురవేసే ప్రయోగపు శాంపిల్ ఆవరణము S అనుకోండి.

$$\therefore S = \{(1,H),.......(6,H),......,(1,T),.....(6,T)\}\ n(S) = 6 \times 2 = 12$$

పాచికపై కనీసము వచ్చు ఘటన E_2 అనుకోండి. $\therefore E_1\{(5,H),(5,T),(6,T),(6,H)\}$

$\therefore n(E_2) = 6\times1=6$

$\therefore E_1 \cap E_2 = \{(5,T)(6,T)\} \therefore n(E_1 \cap E_2) = 2\times12$

పాచికపై కనీసము S అచ్చు మరియు నాణెముపై బొరుసు వచ్చు ఘటన E అనుకోండి. $\therefore E = E_1 \cap E_2$

ఇప్పుడు $P(E) = P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6},\ P(E_1)\times P(E_2) = \frac{4}{12}\times\frac{6}{12} = \frac{1}{6}$

$\Rightarrow P(E_1 \cap E_2)$ = $P(E_1)\times P(E_2)$= $E_1\, E_2$ లు స్వతంత్ర ఘటనలు.

ఉదా : 6 : ఒక ఘటన యొక్క ప్రతికూలత 5 : 2 మరియు వేరొక స్వతంత్ర ఘటన యొక్క అనుకూలత 6 : 5 అయిన రెండు ఘటనలలో కనీసం ఒక ఘటన సంభవించుటకు సంభావ్యత కనుక్కోండి.

జవాబు : $E_1\, E_2$ లు రెండు ఘటనలు అనుకోండి.

ఇవి $P(E_1):P(E_1) = 5:2 \quad \therefore P(\overline{E_1}) = \frac{5}{7},\ P(E_1) = \frac{2}{7}$

ఇదే విధంగా $P(E_2):P(\overline{E_2}) = 6:5 P(\overline{E_2}) = \frac{5}{11},\ P(E_2) = \frac{6}{11}$

ఏ ఘటనలు సంభవించ కుండుటకు సంభావ్యత $P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = P(\overline{E_1}) = \frac{5}{7}\times\frac{5}{11} = \frac{25}{77}$ (E_1, E_2 లు స్వతంత్ర ఘటనలు $\Rightarrow \overline{E_1\, E_2}$ లు స్వతంత్ర ఘటనలు)

కనీసం ఒక ఘటన అయినా సంభవించుటకు సంభావ్యత = $P(E_1 \cup E_2) = 1 - P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = 1 - \frac{25}{77} = \frac{52}{77}$

10.11 అభ్యాసము :

1. ఒక సంచిలో 8 ఎర్రని మరియు 6 నీలం బంతులు కలవు. ఒక్కొక్కసారి 2 బంతులు చొప్పున 2 సార్లు బంతులను తీసిరి. మొదట తీసిన 2 బంతులు ఎర్రనివి. అవి తిరిగి చేర్చిన తరువాత తీసిన 2 బంతులు నీలంవి అయ్యే ఘటన సంభావ్యత కనుక్కోండి.

జవాబు : $\frac{8_{C_2}}{14_{C_2}}\times\frac{6_{C_2}}{14_{C_2}}$

2. ఒక పట్టణంలో 40% ప్రజలకు రాగి జుట్టు, 25% ప్రజలకు తేనెకళ్ళు, 15% ప్రజలకు రాగి జుట్టు మరియు తేనె కళ్ళు కలవు. ఆ పట్టణం నుంచి ఒక వ్యక్తిని యాదృచ్ఛికంగా ఎంపిక చేస్తే ఆ వ్యక్తికి రాగి జుట్టు కలిగివున్నప్పుడు ఆ వ్యక్తి తేనె కళ్ళు కూడా కలిగి వుండే సంభావ్యత ఎంత ?

జవాబు : $\frac{3}{8}$

3. ఒక దంపతులకు 2 పిల్లలు కలరు. వారిలో ఒకరు బాలురని తెలిసిన తర్వాత ఆ ఇద్దరు బాలురయ్యే ఘటన సంభావ్యత కనుక్కోండి.

4. రెండు పాచికలను విసిరిన వానిలో మొదటిదానిపై 2 వచ్చినప్పుడు రెండింటిపై వచ్చు సంఖ్యల మొత్తము 4 కాని అంతకు తక్కువ కాని వచ్చు ఘటన సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జవాబు : $\frac{2}{6}$

5. రెండు సౌష్టవ పాచికలు దొర్లించిన ఆ రెండు పాచికలపై వచ్చు సంఖ్యల మొత్తము 8 అయితే వానిలో ఒకదానిపై వచ్చు సంఖ్య 3 అయ్యే ఘటన సంభావ్యత ఎంత ?

రచయిత

శ్రీమతి ఎస్.వి.ఎస్. గిరిజ

పాఠం 11

ద్విపద విభాజనం

(Binomial Distribution)

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలను తెలుసుకోగలరు.

* నిత్య జీవితంలో అనేక సమస్యలను విశ్లేషించి అర్థం చేసుకునేందుకు సంభావ్యతా విభాజనాలు ఉపయోగపడతాయి. దత్తాంశంలో ఉన్న రిస్క్, అనిశ్చిత పరిస్థితులను విశ్లేషించడానికి, భవిష్యత్సూచనలను నిర్ణయించడానికి ఈ విభాజనాలు తోడ్పడతాయి. వాటిలో ద్విపద విభాజనం గురించి మనం తెలుసుకుందాము.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం :

11.1 పౌనఃపున్య విభాజనం - నిర్వచనం, రకాలు

11.2 ద్విపద విభాజనం - నిర్వచనం

11.3 ద్విపద విభాజన లక్షణాలు, ధర్మములు

11.4 ఉదాహరణలు

11.5 అభ్యాసము

11.1 పౌనఃపున్య విభాజనం:

ఒక ఘటనకు సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని వివిధ తరగతులుగా వర్గీకరించి, ప్రతి తరగతిలోని అంశాలు ఎన్ని సార్లు పునరావృతమయ్యాయో తెలియజేసే సమగ్ర పట్టికను పౌనఃపున్య విభాజనం అంటారు.

ఇవి రెండు రకాలు:

1. సేకరించిన విలువల పై ఆధారపడిన పౌనఃపున్య విభాజనాలు
2. సైద్ధాంతిక పౌనఃపున్య విభాజనాలు

సైద్ధాంతిక విభాజనాలు చాలా రకాలు. వానిలో క్రింది రెండు ముఖ్యమైన విచ్ఛిన్న సంభావ్యతా విభాజనాలను మాత్రమే చదువుతాం.

1. ద్విపద విభాజనం (Binomial Distribution)
2. పాయిజాన్ విభాజనం (Possion's Distribution)

11.2 ద్విపద విభాజనం:

ద్విపద విభాజనాన్ని మొదట జేమ్స్ బెర్నోలీ ప్రతిపాదించాడు.

n ఒక ధన పూర్ణాంకమైతే, $(q+p)^n = \sum_{x=0}^{n} n_{C_x} q^{n-x} p^x$

$$f(x) = n_{C_x}(1-p)^{n-x} p^x, x = 0,1,2,3,............n$$

n ధన పూర్ణాంకము, $0<p<1$ మరియు $f(x)\geq 0$

$$\sum_x f(x) = \sum_{x=0}^{n} n_{C_x}(1-p)^{n-x} p^x = 1$$

$$P(X=x)=n_{C_x} p^x q^{n-x} = n_{C_x} q^{n-x} p^x \ (\because p+q=1)$$

$$\therefore \sum_{x=0}^{n} P(X=x)=1$$

11.3 ద్విపద విభాజన లక్షణాలు, ధర్మములు:

1. ప్రయత్నాల సంఖ్య స్వతంత్రమైనవిగాను, పరిమితంగాను ఉండవలెను.
2. ప్రతి ప్రయత్నంలోని సఫల సంభావ్యత స్థిరము మరియు $p\geq 0$
3. ఒక ప్రయోగంలో n ప్రయత్నాలున్న N ప్రయోగాలలో మొత్తం సఫలాల సంఖ్య $N\cdot n_{C_x} q^{n-x} p^x$
4.

సఫలాల సంఖ్య	పౌనఃపున్యము $f(x)$	$x\cdot f(x)$	$x^2\cdot f(x)$
0	q^n	0	0
1	$nq^{n-1}p$	$nq^{n-1}p$	$n\cdot q^{n-1}p$
2	$\frac{n(n-1)}{1.2}q^{n-2}p^2$	$n(n-1)q^{n-2}p^2$	$2n(n-1)q^{n-2}p^2$

3	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}q^{n-3}p^3$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}q^{n-3}p^3$	$\frac{3n(n-1)(n-2)}{1.2}q^{n-3}p^3$
-------	-------	-------	-------
-------	-------	-------	-------
n	p^n	np^n	n^2p^n

ద్విపద విభాజనము యొక్క మధ్యమము, $\mu = np$

విస్తృతి , $\sigma^2 = npq$

క్రమ విచలనము, $\sigma = \sqrt{npq}$

11.4 ఉదాహరణలు:

ఉదా-1: ఒక నాణెమును 5 సార్లు ఎగురవేసినపుడు 2 బొమ్మలు, 3 బొరుసులు వచ్చుటకు సంభావ్యతను కనుగొనుము.

జవాబు: బొమ్మ వచ్చుటకు సంభావ్యత p మరియు బొరుసు వచ్చుటకు సంభావ్యత q అని అనుకోండి. $p=\frac{1}{2}, q=\frac{1}{2}$.

నాణెమును 5 సార్లు ఎగురవేసినపుడు 2 బొమ్మలు, 3 బొరుసులు వచ్చుటకు సంభావ్యత $= 5_{C_2}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$

ఉదా-2: ఒక ద్విపద విభాజనము యొక్క మధ్యమం మరియు విస్తృతి మొత్తం 5 యత్నములలో 1.8 అయిన ఆ ద్విపద విభాజనమును కనుక్కోండి.

జవాబు: మధ్యమం $= np$, విస్తృతి $= npq$, $np + npq = 1.8$

మరియు $n=5$ $\quad np + npq = 1.8$

$$\Rightarrow np(1+q) = 1.8$$

$$\Rightarrow 5p(1+1-p)=1.8 \Rightarrow 5p^2-10p+1.8=0$$

$$\therefore p^2-2p+0.36=0 \Rightarrow p=\frac{2\pm\sqrt{4-1.44}}{2}$$

$$=\frac{2\pm1.6}{2}=1.8,\ 0.2$$

$$p \neq 1.8,\ p = 0.2 = \frac{1}{5}$$

$$\therefore\ q = 1 - p = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \qquad \therefore n = 5,\ p = \frac{1}{5},\ q = \frac{4}{5}$$

ద్విపద విభాజనము $= \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\right)^5$

ఉదా-3: ఒక ఫ్యాక్టరీ వారు తయారు చేసిన బల్బు 100 రోజులు వాడిన తర్వాత మాడిపోవుటకు సంభావ్యత 0.05. అటువంటి 5 బల్బులలో (1) ఏదీ మాడిపోకుండుటకు, (2) ఒకటి కంటే ఎక్కువ బల్బులు మాడకుండుటకు, (3) ఒకటి కంటే ఎక్కువ బల్బులు మాడుటకు మరియు (4) కనీసం ఒక బల్బు అయిన 100 రోజులు వాడిన తర్వాత మాడుటకు సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

జవాబు: ఇచ్చినవి బల్బు మాడుటకు సంభావ్యత, $p = 0.05 = \frac{1}{20}$

బల్బు మాడకుండుటకు సంభావ్యత, $q = \frac{19}{20}$

బల్బుల సంఖ్య, $n = 5$

x అనునది 100 రోజుల తర్వాత మాడిపోవు బల్బుల సంఖ్య అయిన $p(X = x) = n_{C_x}\ q^{n-x}\ p^x$

(1) P(ఏది మాడనపుడు) $= P(X = 0) = 5_{C_0}\left(\frac{19}{20}\right)^5\left(\frac{1}{20}\right)^0 = \left(\frac{19}{20}\right)^5$

(2) P(ఒకటి కంటే ఎక్కువ మాడకుండుటకు) $= P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$

$$= 5_{C_0}\left(\frac{19}{20}\right)^5 + 5_{C_1}\left(\frac{19}{20}\right)^4\left(\frac{1}{20}\right) = \frac{6}{5}\left(\frac{19}{20}\right)^4$$

(3) P(ఒకటి కంటే ఎక్కువ మాడుటకు) $= P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1)$

$$= 1 - \frac{6}{5}\left(\frac{19}{20}\right)^4$$

(4) P(కనీసం ఒకటి మాడుటకు) $= 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^5$

ఉదా-4: ప్రతి 30 రోజులలో సరాసరిన 10 రోజులు వర్షము పడుతుంటే యిచ్చిన వారములో కనీసము 3 రోజులు వర్షము పడుటకు సంభావ్యత కనుక్కోండి?

జవాబు: వర్షము పడుటకు సంభావ్యత p మరియు పడకుండా ఉండుటకు q అనుకోండి.

$$\therefore p = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \;,\; q = 1 - p = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

వర్షము పడు రోజుల సంఖ్య x అనుకొనిన, $n = 7$ అగుటచే

$$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) + P(X=6) + P(x=7)$$

$$= \sum_{x=3}^{7} P(X=x) = \sum_{x=3}^{7} 7_{C_x}\, q^{7-x}\, p^x = \sum_{x=3}^{7} 7_{C_x} \left(\frac{2}{3}\right)^{7-x} \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

ఉదా-5: 10,000 కుటుంబాలలో ఒక్కొక్క కుటుంబానికి నలుగురు పిల్లలు ఉన్నట్లయితే ఆ నలుగురు పిల్లలు ఆడపిల్లలయ్యే కుటుంబాల సంఖ్య కనుక్కోండి.

జవాబు: ఒక కుటుంబంలో ఏ బిడ్డైన మగబిడ్డ గాని, ఆడబిడ్డ గాని కావచ్చు

కాబట్టి $p =$ మగబిడ్డ అగుటకు సంభావ్యత $= \frac{1}{2}$,

$q =$ ఆడబిడ్డ అగుటకు సంభావ్యత $= \frac{1}{2}$

ఒక కుటుంబములోని నలుగురు ఆడపిల్లలయ్యే సంభావ్యత $= 4_{C_0}\, q^4 p^0 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

10,000 కుటుంబాలలో కుటుంబంలోని నలుగురు ఆడపిల్లలయ్యే కుటుంబాల సంఖ్య $= 10000 \times \frac{1}{2^4} = 625$.

ఉదా-6: 52 కార్డులు గల బాగుగా కలిపిన ఒక పేక ముక్కల కట్ట నుండి అయిదు కార్డులను ఒక్కొక్కటిగా తీసి మరల ఆ కట్టలో ఉంచిన (1) ఆ అయిదు కార్డులు ఇస్పేటులగుటకు సంభావ్యత ఎంత? (2) ఏ కార్డు ఇస్పేటు కాకుండుటకు సంభావ్యత ఎంత?

జవాబు: కార్డు ఇస్పేటు అగుటకు సంభావ్యత $= p = \frac{13_{C_1}}{52_{C_1}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

కార్డు ఇస్పేటు కాకుండుటకు సంభావ్యత $= q = 1 - p = \frac{3}{4}$

ఇస్పేటు అగు కార్డుల సంఖ్య x అనుకోండి.

$$n = 5$$

(1) అయిదు కార్డులు ఇస్పేటులగుటకు సంభావ్యత,

$$P(X=5)=5_{C_5}\ q^0 p^5 = 1\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^5=\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

(2) ఏ కార్డు ఇస్పేటు కాకుండుటకు సంభావ్యత ,

$$P(X=0)=5_{C_0}\ q^5 p^0=\left(\frac{3}{4}\right)^5$$

ఉదా-7: A, B పై ఒక గేమును గెలుచుటకు అవకాశము 2/3 అయిన 5 గేముల పరంపరలో A, B పై ఖచ్చితంగా 3 గేములు గెలవడానికి సంభావ్యత ఎంత?

జవాబు: A, B పై గేము గెలుచుటకు సంభావ్యత, $p=\frac{2}{3}$

A, B పై గేము గెలవకుండుటకు సంభావ్యత, $q=1-p=\frac{1}{3}$

గెలవగలిగిన గేముల సంఖ్య x అనుకోండి

$n=5$

A, B పై ఖచ్చితముగా 3 గేములు గెలవడానికి సంభావ్యత

$$P(X=3)=5_{C_3}\ q^2 p^3=\frac{5.4}{1.2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$$

ఉదా-8: ప్రతి 10 ఓడలలో సగటున 6 ఓడలు క్షేమంగా వస్తున్నట్లయితే, మొత్తము 1000 ఓడలలో క్షేమంగా వచ్చే ఓడల సంఖ్యకు మధ్యమం మరియు క్రమవిచలనం $(S.D.)$ కనుగొనుము.

జవాబు: ద్విపద విభాజనంలో మధ్యమం, క్రమవిచలనం కనుగొనవచ్చును.

(1) $n=1000$, ఓడ క్షేమంగా రావటానికి సంభావ్యత, $p=\frac{6}{10}$

$$\therefore q=\frac{4}{10}$$

మధ్యమం $=np=1000\times\frac{6}{10}=600$

(2) క్రమ విచలనం, $\sigma=\sqrt{npq}$

$$=\sqrt{1000\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}}=\sqrt{240}$$

$=15.5$ (సుమారుగా)

11.5 అభ్యాసము:

1. 7 నాణెములను ఎగురవేసినపుడు (ఎ) ఖచ్చితముగా 4 బొమ్మలు వచ్చుటకు, (బి) 6 లేదా అంతకంటే ఎక్కువ బొమ్మలు వచ్చుటకు సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

   జ. (ఎ) $7_{C_4}\left(\frac{1}{2}\right)^7$ (బి) $\frac{1}{16}$.

2. ద్విపద విభాజనంలో మధ్యమం = 20, విస్తృతి = 15 అయితే q కనుక్కోండి.

   జ. 0.25

3. ఒక ద్విపద విభాజనమునకు మధ్యమం 6 మరియు క్రమవిచలనం $(S.D.)\sqrt{2}$ అయిన ఆ ద్విపద విభాజనము $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^9$ అని చూపండి.

4. 5 సౌష్ఠవ నాణాలను ఒకేసారి ఎగురవేసిన, ఒక బొమ్మ వచ్చుటకు సంభావ్యత $\frac{5}{32}$ అని చూపండి.

5. నలుగురు పిల్లలు ఉన్న ఒక కుటుంబములో కనీసం ఒక బాలిక ఉండే ఘటన సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

   జ. $\frac{15}{16}$

6. ద్విపద విభాజనంలో $n=15,\ p=0.1,\ p(X \geq 2)$ ను కనుక్కోండి.

   జ. $1-\left[15_{C_0}\, q^{15}\, p^0 + 15_{C_1}\, q^{14}\, p^1\right]$

7. ఒక విమానం నుంచి జారవిడిచిన బాంబు లక్ష్యాన్ని చేరుటకు సంభావ్యత $\frac{1}{5}$. ఆ విమానం జారవిడిచిన 6 బాంబులలో కనీసము 2 బాంబులు లక్ష్యమును చేరుటకు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

   జ. $1-\left[6_{C_0}\left(\frac{4}{5}\right)^6\left(\frac{1}{5}\right)^0 + 6_{C_1}\left(\frac{4}{5}\right)^5\left(\frac{1}{5}\right)\right]$

8. ఒక ఉత్పత్తిలో 5% లోపమున్న వస్తువులున్నాయనుకోండి. 8 శాంపుల్ వస్తువులలో 2 కంటే తక్కువ లోపమున్న వస్తువులుండే సంభావ్యత ఎంత?

   జ. $P(X<2)=\left(\frac{19}{20}\right)^7\left(\frac{27}{20}\right)$

రచయిత

డా॥ కె. చందన్

పాఠం 12

పాయిజాన్ విభాజనం

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలను తెలుసుకోగలరు.

* పాయిజాన్ విభాజనం పై నిర్దిష్టమైన అవగాహన ఏర్పడి ప్రయోజనాలు తెలుసుకొనవచ్చు.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం :

12.1 పాయిజాన్ విభాజన వివరణ

12.2 పాయిజాన్ విభాజన లక్షణములు

12.3 పాయిజాన్ విభాజనానికి అనువర్తిత ఉదాహరణలు

12.4 అభ్యాసము

12.1 పాయిజాన్ విభాజన వివరణ (Explain the poisson distribution) :

ప్రయోగముల సంఖ్య అనంతముగా ఉన్నప్పుడు, అనుకూల సంభావ్యత చాలా తక్కువగా ఉంటే, అటువంటి ప్రయోగాలు పాయిజాన్ విభాజనము క్రిందికి వస్తాయి. ఇది ఒక విచ్ఛిన్న విభాజనము. ఇది ద్విపద విభాజనమునకు అవధి ఈ క్రింది నియమాలతో అవుతుంది.

1. n విలువ అనంతము అనగా $n \to \propto$
2. ప్రతి యత్నములో సఫలము యొక్క స్థిర సంభావ్యత p, మిక్కిలి చిన్న సంఖ్య $i.e.\ \ p \to 0$
3. $np = \lambda$ పరిమితము కావున $p = \lambda/n$ మరియు $q = 1 - \dfrac{\lambda}{n}$ ఇక్కడ λ పాయిజాన్ పరామితి

నిర్వచనము:

ఒక చలరాశి 'X' విలువలు తీసుకొంటూ, సంభావ్యత ప్రమేయము

$$P(x,\lambda) = P(X = x)_n = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}\ ;\ x = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots = 0$$

మిగిలినపుడును పాటించిన X పాయిజాన్ విభాజనమును పాటించును అంటారు. ఇక్కడ λ, ను పరామితి అందురు.

$\lambda > 0$

12.2 పాయిజాన్ విభాజన లక్షణములు:

1. పాయిజాన్ విభాజనములో మధ్యమము = విస్తృతి $=\lambda$.
2. దీనిలో ఒకే ఒక పరామితి λ.
3. పాయిజాన్ విభాజనం బాహుళకము, λ పూర్ణాంకమైనపుడు λ కు, గానపుడు $[\lambda]+1$ కు సమానమవుతుంది.

   ఇక్కడ $[\lambda]$ అనేది λ లో పూర్ణాంక భాగమును సూచిస్తుంది.
4. స్వతంత్ర పాయిజాన్ చలరాశుల మొత్తము కూడా ఒక పాయిజాన్ చలరాశే అవుతుంది.
5. X పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక అనుకోండి దీని పరామితి m అయితే

   $f(x+1)=\dfrac{m}{x+1}f(x)$ ను అవృత్తి సూత్రము అంటారు.

12.3 పాయిజాన్ విభాజనపు అనువర్తిత ఉదాహరణలు :

ఉదాహరణ - 1:

2 పరామితి గల X ఒక పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక $P(X\geq 1)$ విలువ ఎంత?

జవాబు:

X, పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక కాబట్టి X యొక్క సంప్రాంప్ర

$$f(x)=\frac{e^{-2}2^{x}}{x!}\ ;\ x=0,1,2,.........$$

$=0$ అలాకాకుంటే

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)$$

$$=1-f(0)$$

$$=1-e^{-2}=0.865$$

ఉదాహరణ - 2:

20, 21 సంవత్సరాల మధ్య గల 53,889 యువకులను మిల్టరి ఉద్యోగం కోసం పరీక్ష చేస్తే అందులో 1,374 మందికి దృష్టిలో లోపం ఉన్నది. ఇదే వయస్సు గల 50 మంది యువకులను యాదృచ్ఛికంగా తీసుకొంటే, వరుసగా 0, 1, 2, 3, ... యువకులు దృష్టిలో లోపం కలిగి ఉండటానికి సంభావ్యతను కనుగొనండి.

జవాబు:

53,889 మంది యువకులలో **1,374** గురికి దృష్టిలో లోపం ఉన్నది. కాబట్టి దృష్టి లోపం కలవారి శాతము $=2.55=\frac{1374}{53889}$

మందిలో దృష్టిలో లోపం గలవారి సరాసరి $=50\times\frac{2.55}{100}$

$$=1.275$$

ఇది పాయిజాన్ విభాజనం యొక్క పరామితి m కు సమానము కాబట్టి $\lambda=1.275$

$$P(X=0)=f(0)=e^{\lambda}=e^{-1.275}$$

$$P(X=2)=f(2)=\frac{e^{-m}m^2}{2!}\ \ 0.227$$

$$P(X=3)=f(3)=\frac{e^{-m}m^3}{3!}\ \ 0.098$$

$$P(X=4)=f(4)=\frac{e^{-m}m^4}{4!}\ \ 0.31$$

$$P(X=5)=f(5)=\frac{e^{-m}m^5}{5!}\ \ 0.008$$

$\therefore$ యాదృచ్ఛికంగా తీసుకుంటే **50** మందిలో దృష్టిలో లోపం లేకపోతే సంభావ్యత **0.279.** అందులో ఒక్కరికి మాత్రమే దృష్టి లోపం ఉండే సంభావ్యత **0.356,** మూడు కంటే ఎక్కువ కాకుండా దృష్టిలో లోపం ఉన్నవారికి సంభావ్యత

$$=f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$$

$$=0.958$$

ఉదాహరణ - 3:

మోటారు కారులను అద్దెకు ఇచ్చే సంస్థలో రెండు మోటారులున్నాయి. ప్రతి దినము మోటారుల గిరాకీ సంఖ్య **1.5,** పరామితి గల పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక అంటే**?**

1. ఒక్క మోటారును ఉపయోగించకపోవడాన్ని
2. మోటారుల గిరాకిని, నిరాకరించడానికున్న సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జవాబు:

మోటారుకు X గిరాకీలు వచ్చే రోజుల సంభావ్యత

$$P\left(X = x\right) = \frac{e^{-1.5}\left(1.5\right)^{x}}{x!}$$

ఎందుకంటే రోజుకు మోటారు గిరాకీల సంఖ్య 1.5 పరామితి గల పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక

1. మోటారు గిరాకీ లేకుండా ఉండే సంభావ్యత $P\left(X = 0\right) = e^{-1.5} = 0.2231$

2. మోటారు గిరాకీని నిరాకరించే సంభావ్యత $P\left(X \geq 2\right)$

$$= 1 - P\left(X \geq 2\right)$$

$$= 1 - \left[P\left(X = 0\right) + P\left(X = 1\right) + P\left(X = 2\right)\right]$$

$$= 1 - e^{-1.5}\left[1 + 1.5 + \frac{1.5^{2}}{2!}\right]$$

$$= 1 - 0.2231 \times 3.625$$

$$= 1 - 0.80874$$

$$= 0.19126$$

ఉదాహరణ - 4:

ఒక ఆసుపత్రి సాధారణంగా రోజుకు 50 రోగులను చేర్చుకొంటుంది. సరాసరిన 100కి ముగ్గురు రోగులు ప్రత్యేక గదులలో ప్రత్యేక సదుపాయాలు కోరుతారు. ఒక రోజు ఉదయము, అటువంటి మూడు గదులు ఖాళీగా ఉన్నాయి. 50 రోగులను తీసుకొన్నారని అనుకుంటే, ముగ్గురు కంటే ఎక్కువ రోగులకు ప్రత్యేక గదులు కావలసిన సంభావ్యత ఎంత?

జవాబు:

ఒక వ్యక్తికి ప్రత్యేక గదులు సదుపాయాలతో కావలసిన సంభావ్యత $P = \frac{3}{100} = 0.03$

$$\lambda : np = 50 \times 0.03$$

$$= 1.5$$

$$\therefore n = 50$$

P విలువ చిన్నది కావడం వలన పాయిజాన్ విభాజనాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

X రోగులు ప్రత్యేక గదులు కోరే సంభావ్యత $P\left(X = x\right) = \frac{e^{-x}}{x!}$

$$= \frac{e^{-1.5}\,(1.5)^x}{x!}, \; x=0,1,2,........$$

ముగ్గురు కంటే ఎక్కువ రోగులు, ప్రత్యేక సదుపాయాలలో కోరే సంభావ్యత $= P(>3)$

$$1 - p(x \le 3)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{3} e^{1.5}\,\frac{(1.5)^x}{x!}$$

$$= 1 - e^{1.5}\sum_{x=0}^{3}\frac{(1.5)^x}{x!}$$

ఉదాహరణ - 5:

ఒక టెలిఫోన్ ఎక్స్చేంజికి ఉదయం 10, 11 గంటల మధ్య మరియు 11, 12 గంటల మధ్య వచ్చే టెలిఫోన్ పిలుపుల సంఖ్యలు, వరుసగా 6, 2 పరామితులుగా గల పాయిజాన్ చలరాశులు అయితే, అవి స్వతంత్రములైతే ఏదైనా ఒక రోజును ఎక్స్చేంజికి 10, 12 గంటల మధ్య వచ్చే టెలిఫోను పిలుపుల సంఖ్య 5 కన్నా ఎక్కువ అగుటకు సంభావ్యత ఎంత?

జవాబు:

పాయిజాన్ విభాజన లక్షణము ప్రకారము 10, 12 గంటల మధ్య వచ్చు పిలుపుల సంఖ్య ఒక పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక పరామితి గల ఒక పాయిజాన్ చలరాశి అవుతుంది.

$$i.e.,\; \lambda = 8$$

$$P(X = x) = f(x) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-8}\,8^x}{x!}, \; x = 0,1,2,.....$$

10 గంటలకు, 12 గంటలకు మధ్యన 5 కంటే ఎక్కువ పిలుపులు వచ్చే సంభావ్యత $= P(X > 5)$

$$= 1 - P(X \le 5)$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{5}\frac{e^{-8}\,8^x}{x!}$$

$$= 1 - 0.1912$$

$$= 0.8088$$

ఉదాహరణ - 6:

ఒక పట్టణంలో 1000 రోజులలో X మోటారు ప్రమాదాలు సంభవించే రోజులు, దిగువ ఇచ్చినారు. ఈ దత్తాంశానికి పాయిజాన్ విభాజనాన్ని సంధానించి సైద్ధాంతిక పౌనఃపున్యాలను కనుక్కోండి.

జవాబు:

ప్రమాదాల సంఖ్య X . వాటి పౌనఃపున్యాలు

ప్రమాదాల సంఖ్య X:	0	1	2	3	4	5	6	7
రోజుల సంఖ్య f:	305	365	210	80	28	9	2	1

ప్రమాదాల సరాసరి

$$\frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{0.305 + 1.365 + 2.210 + 3.80 + 4.28 + 5.9 + 6.2 + 7.1}{1000}$$

$$= 1.2$$

ఇది పాయిజాన్ విభాజనం యొక్క పరామితి m కి అంచనావేస్తారు.

కాబట్టి $\widehat{m} = 1.2$ సైద్ధాంతిక పౌనఃపున్యాలు

$$1000 \times \frac{e^{-1.2}\,(1.2)^x}{x!} \text{లో } \; x = 0,1,2,........,7$$

విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే వస్తాయి. అవి వరుసగా సుమారు 301.2, 361.4, 216.8, 86.7, 26.0, 1.2, 0.2 అవుతాయి.

ఉదాహరణ - 7:

X పాయిజాన్ చలరాశి అవుతూ $P\left(X = 2\right) = 9\,P\left(X = 4\right) + 90P\left(X = 6\right)$ అయితే λ విలువ, X మధ్యమము కనుగొనుము.

జవాబు:

λ పరామితిగా, X పాయిజాన్ చలరాశి అయితే

$$P\left(X = x\right) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^x}{x!},\; x = 0,1,2,..........\lambda > 0$$

ఇక్కడ $P\left(X = 2\right) = 9P\left(X = 4\right) + 90P\left(X = 6\right)$ నుండి

$$\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^2}{2!} = e^{-\lambda}\left[9\frac{\lambda^4}{4!} + 90\frac{\lambda^6}{6!}\right]$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{8}\left[3\lambda^2+\lambda^4\right]$$

$$= \lambda^4+3\lambda^2-4=0$$

సాధించిన

$$\lambda^2 = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm 5}{2}$$

$\lambda > 0$, కావున $\lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1$

కావున అంకమధ్యమము $= \lambda = 1$ మరియు $\mu =$ విస్తృతి $= \lambda = 1$

ఉదాహరణ - 8:

ఈ క్రింది పట్టికలో ఒక పుస్తకములోని తప్పులు పేజీలు ఇవ్వబడినవి. దీనికి పాయిజాన్ విభాజనమును నిర్మింపుము.

తప్పుల సంఖ్య	-	0	1	2	3	4
పేజీల సంఖ్య	-	211	90	19	5	0

జవాబు:

$Xi =$ తప్పుల సంఖ్య

$fi =$ పేజీల సంఖ్య అనుకొనుము

Xi	fi	$Xifi$
0	211	0
1	90	90
2	19	38
3	5	15
4	0	0
	$N=325$	143

మధ్యమము $= \overline{X} = \frac{\sum fiXi}{N}$

$$=\frac{143}{325}$$

$$= 0.44$$

పాయిజాన్ సంభావ్యతా విభాజనము

$$P(X)=\frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!}\ ;\ x=0,1,2,.........$$

ఇక్కడ 'λ' పరామితి λ తెలిసిన పాయిజాన్ విభాజనము అంతయు తెలియును.

$$\lambda \text{ మధ్యమము } \overline{X}=\frac{\sum fiXi}{N}=0.44$$

$$\hat{\lambda}=0.44$$

కావున పాయిజాన్ విభాజనము సంభావ్యతా ప్రమేయము

$$P(X)=\frac{e^{-0.44}(0.44)X}{X!}\quad ;\quad X=0,1,2,........$$

0 తప్పు వుండే సంభావ్యత

$$P(0)=\frac{e^{-0.44}\,(0.44)^{0}}{0!}=e^{-0.44}=\frac{1}{e^{0.44}}=\frac{1}{1.5527}=0.644$$

ఒక తప్పు ఉండుటకు సంభావ్యత

$$P(1)\ \frac{e^{-0.44}(0.44)^{1}}{1!}=e^{-0.44}\times 0.44$$

$$=0.644\times 0.44$$

$$=0.2834$$

రెండు తప్పులు వుండుటకు సంభావ్యత

$$P(2)=\frac{e^{-0.44}\,(0.44)^{2}}{2!}=0.0623$$

మూడు తప్పులు వుండే సంభావ్యత

$$P(3)=\frac{e^{-0.44}\,(0.44)^3}{3!}$$

$$=0.0091$$

నాల్గు తప్పులు వుండే సంభావ్యత

$$P(4)=\frac{e^{-0.44}\,(0.44)^4}{4!}$$

$$=0.001$$

పౌనఃపున్యాలు ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి.

X	-	0	1	2	3	4
$f(X):N\,P(X)$:	-	209	92	20	3	1

12.4 అభ్యాసము:

ఎ. ఈ క్రింది వానికి సంక్షిప్తంగా జవాబులు వ్రాయండి.

1. పాయిజాన్ విభాజన గురించి వివరింపుము.
2. పాయిజాన్ విభాజన లక్షణములు తెలుపుము.
3. పాయిజాన్ విభాజన యొక్క అశంసిత విలువ మరియు విస్తృతిని వ్రాయండి.
4. పాయిజాన్ విభాజన యొక్క బాహుళకమును వ్రాయండి.
5. పాయిజాన్ విభాజన యొక్క ఘాతీకోత్పాదన ప్రమేయమును వ్రాయండి.

బి. ఈ క్రింది వానికి విపులంగా జవాబులు వ్రాయండి.

1. పాయిజాన్ విభాజనం యొక్క లక్షణాలు లేక గుణాలు గురించి వ్రాసి వాటికి ఉదాహరణ ఇవ్వండి.
2. 2 పరామితి గల X ఒక పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక $P(X\geq 1)$ విలువ ఎంత?
3. 20, 21 సంవత్సరాల మధ్య గల 53,889 యువకులను మిల్టరి ఉద్యోగం కోసం పరీక్ష చేస్తే అందులో 1,374 మందికి దృష్టిలో లోపం ఉన్నది. ఇదే వయస్సు గల 50 మంది యువకులను, యాధృచ్ఛికంగా తీసుకుంటే వరుసగా 0, 1, 2, 3, ... యువకులు దృష్టిలో లోపం కలిగి ఉండటానికి సంభావ్యతలను కనుగొనండి.

4. మోటారు కారులను అద్దెకు ఇచ్చే సంస్థలో రెండు మోటారులున్నాయి. ప్రతి దినము మోటారుల గిరాకీ సంఖ్య 1.5, పరామితి గల పాయిజాన్ యాదృచ్ఛిక అంటే -

   1. ఒక్క మోటారును ఉపయోగించకపోవడాన్ని,

   2. మోటారుల గిరాకీని నిరాకరించడానికి కన్నా సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

5. ఒక పాయిజాన్ విభాజనం యొక్క పరామితి 1. దాని సరాసరి నుంచి మధ్యమ విచలనము, క్రమ విచలనానికి $2/e$ రెట్లు ఉన్నదని చూపండి.

6. ఈ క్రింది పట్టికలో ఒక పుస్తకములోని తప్పులు, పేజీలు ఇవ్వబడినవి. దీనికి పాయిజాన్ విభాజనమును నిర్మింపుము.

తప్పుల సంఖ్య	-	0	1	2	3	4
పేజీల సంఖ్య	-	211	90	19	5	0

రచయిత

డా॥ కె. చందన్

పాఠం 13

సామాన్య విభాజనం

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలను తెలుసుకోగలరు.

* సామాన్య విభాజనంపై నిర్దిష్టమైన అవగాహన ఏర్పడి దాని ప్రయోజనాలు తెలుసుకొనవచ్చు.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

13.1 సామాన్య విభాజనం వివరణ

13.2 సామాన్య విభాజనం యొక్క నిర్వచనం మరియు లక్షణాలు

13.3 సామాన్య విభాజనం ప్రాముఖ్యత

13.4 సామాన్య విభాజనం యొక్క వైశాల్య లక్షణాలు

13.5 ఇచ్చిన దత్తాంశానికి సామాన్య విభాజనాన్ని సంధానించడం

13.6 అభ్యాసాలు

13.1 సామాన్య విభాజనం వివరణ :

పదునెనిమిదో శతాబ్దం యొక్క ప్రారంభం నుంచి సామాన్య విభాజనం ప్రాముఖ్యత వహించింది. 1733వ సంవత్సరంలో మొట్టమొదటి ఆంగ్లేయ శాస్త్రజ్ఞుడు మానీ సామాన్య విభాజనాన్ని ద్విపద విభాజనం యొక్క అవధిగా కనుగొన్నాడు. 19వ శతాబ్దం యొక్క ప్రారంభంలో ఖగోళశాస్త్రంలో ఖగోళ పదార్థముల యొక్క కక్ష్యలు కనుక్కోవడంలో వచ్చే తప్పులు, ప్రాథమిక దోషాలు, సామాన్య విభాజనాన్ని అనుసరిస్తాయని కనుగొన్నాడు గాస్.

$n \to \infty$ అయినప్పుడు, ద్విపద విభాజనము, హైపర్ జాయెట్రిక్ విభాజనము, పాయిజాన్ విభాజనము మొదలైనవి. χ^2 (Chi-Square), Student 't' స్నె డాక్టర్ F, విభాజనాలు వంటి సంఖ్య శాస్త్రంలోని అనేక విభాజనాల అవధి కూడా సామాన్య విభాజనం అవుతుంది. జన సంఖ్యాకీయ శాస్త్రము, జీవ శాస్త్రము మొదలైన శాస్త్రముల యందు అనేక ప్రయోగాలలో వచ్చే విభాజనములు కూడా సుమారుగా సామాన్య విభాజనాన్ని అనుసరిస్తాయి.

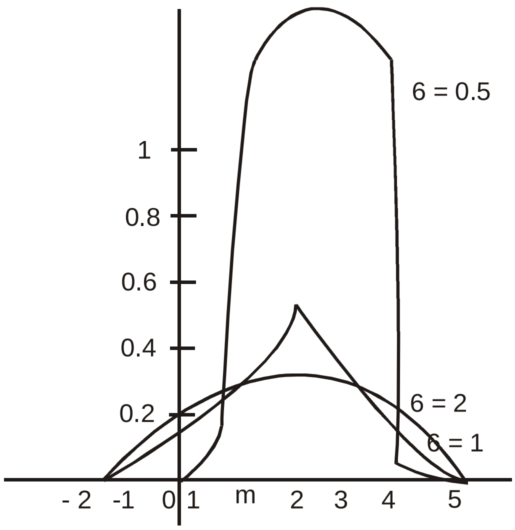
శాంపిల్ సంఖ్యా శాస్త్రంలో స్వతంత్ర యాదృచ్ఛిక చలరాశుల విభాజనాలు తెలియకపోయినా వాటి సరాసరి యొక్క విభాజనము, శాంపిల్ సంఖ్య పెద్దదిగా ఉన్నప్పుడు ఇంచుమించుగా సామాన్య విభాజనంను అనుసరిస్తుంది. సంఖ్యాశాస్త్ర ఉపకల్పనలో ఇది ప్రముఖస్థానం వహించింది.

13.2 సామాన్య విభాజనం యొక్క నిర్వచనం మరియు లక్షణాలు :

సామాన్య విభాజనం నిర్వచనం : అవిచ్ఛిన్న యాదృచ్ఛిక చలరాశి సంభావ్యత సంప్రదాయ ప్రమేయము.

$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$, $\sigma>0$ను కలిగివుండే ఆ యాదృచ్ఛిక చలరాశి అనీ, దాని విభాజనాన్ని సామాన్య విభాజకమని అంటారు. దానిని $x, N(m,\sigma)$గా గుర్తిస్తారు. m,σ లు సామాన్య విభాజనం యొక్క పరిమితులు. $m=0, \sigma^2=1$ అయినపుడు x యాదృచ్ఛిక చలరాశిని క్రమసామాన్య యాదృచ్ఛిక చలరాశి అనీ దాని విభాజనాన్ని క్రమ, సామాన్య విభాజనమనీ అంటారు. $y=f(x)$ను సామాన్య సంభావ్యతా వక్రము (Normal Probability Curve) అంటారు.

సామాన్య విభాజనం యొక్క లక్షణాలు :



1. సామాన్య వక్రము పటము యొక్క ముఖ్య లక్షణాలు $x=m$ వద్దనున్న ద్వితీయ నిరూపకము నుంచి సామాన్య విభాజన రేఖాపటము సౌష్టవంగా ఉంటుంది. అది గంట ఆకారంలో క్రింది విధంగా ఉంటుంది.

2. దీని అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకము 'm'కు సమానము. క్రమ విచలనము 'σ'కు సమానము. విస్తృతి 'σ^2' అవుతుంది.

3. సామాన్య విభాజనము యొక్క సంభావ్యత దాని వక్రము, $x-$అక్షము మధ్య వైశాల్యముల ద్వారా వస్తుంది. కొన్ని సర్వసాధారణముగా ఉపయోగపడే వైశాల్యములు ఈ క్రింది విధముగా ఉంటాయి.

   (ఎ) అంకమధ్యమము $\pm 1\sigma$ ల మధ్య **68.27%** వైశాల్యమును

   (బి) అంకమధ్యమము $\pm 2\sigma$ అనేది **95.45%** వైశాల్యమును కలిగియుండును.

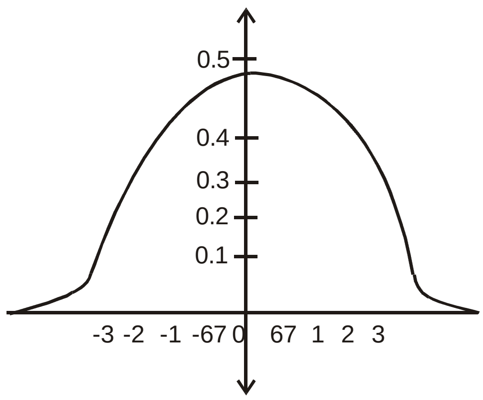
   (సి) అంకమధ్యమము $\pm 3\sigma$ అనేది **99.73%** వైశాల్యమును కలిగియుండును.

13.3 సామాన్య విభాజనం ప్రాముఖ్యత (Importance of Normal Distribution) :

ఇటీవల కాలంలో సామాన్య విభాజనాన్ని సాంఘిక, స్వాభావిక శాస్త్రాల్లోనూ ఆర్థిక వ్యాపార దత్తాంశ విశేషణలోనూ విరివిగా ఉపయోగిస్తున్నారు. క్రింది అంశాలు దాని ప్రాముఖ్యతను వివరిస్తారు.

1. ఒక జనాభాకి సంబంధించిన దత్తాంశ విలువలు సామాన్యంగా విభాజితం కానప్పటికి, దాని నుంచి సేకరించే బృహత్ప్రతి చయనాల సాంఖ్యకాలు మాత్రం సామాన్యం విభాజనంగా రూపొందే ప్రవృత్తిని కలిగివుంటాయి. ఆ కారణాల వల్ల బృహత్ప్రతి చయనాల ఆధారంగా వాటి అనురూప జనాభా విలువలను, ప్రామాణిక విచలనం సహాయంతో ఏ కనిష్ఠ, గరిష్ఠ అవధుల మధ్య ఉంటాయో నిర్ణయించవచ్చు.
2. ద్విపద పాయిజాన్ విభాజనాలలో ప్రతిచయన పరిమాణం పెద్దగా వుండే వివిధ సంఘటనల సంభావ్యతలను కనుక్కోవడం కష్టంగా ఉంటుంది. ఇలాంటి సందర్భాలలో వీటిని సామాన్య విభాజనంగా ఉజ్జాయింపు చేసి సంభావ్యతలను సులభంగా గణించవచ్చును.
3. సైద్ధాంతిక (Theoritical), అనువర్తిత (Applied) గణాంక శాస్త్రాల్లో సామాన్య విభాజనం ఉపకల్పనవల్ల అనేక సమస్యలను సంతృప్తికరంగా పరిష్కరించవచ్చు.
4. విభాజనాలు సామాన్యంగా లేనప్పుడు ఇచ్చిన చలరాశిని ఉజ్జాయింపు చేసి సామాన్య విభాజనాలు మార్చవచ్చు. ఉదాహరణకు ఒక జనాభాలోని x చలరాశి అస్పాష్టంగా ఉంటే xకు బదులు x^2ను తీసుకుంటే దానిలోను అస్పాష్టత తొలగి కొంత సామాన్యత రావచ్చు.
5. సామాన్య విభాజన గణితీయ ధర్మాల వల్ల విభాజనంలోని అంశాలను సులభంగా తెలుసుకోవచ్చు. వివిధ మూపురాకార (Humped type) విభాజనాల రూపాలు దాదాపు సామాన్య విభాజన రూపానికి దగ్గరగా ఉంటాయి. కాబట్టి, ఒక విభాజనం మూపురాకారం ఏ విధంగా ఉందో తెలియనప్పుడు, అది 'సామాన్య విభాజనంగా ఉంటుంది'. అనే ప్రాతిపదికను తీసుకుని అది ఎంత వరకు సమంజసమో పరీక్షించవచ్చు.

13.4 సామాన్య విభాజనం యొక్క వైశాల్య లక్షణాలు :



$m \pm \sigma$, $m \pm 2\sigma$, $m \pm 3\ \sigma$ అనే నిర్దేశిత అవధుల మధ్య సామాన్య విభాజన వైశాల్యములు, వాని ద్వారా సూచించబడే సంభావ్యతలు మనము ఇంతకుముందు తెలుసుకున్నాము. ఈ వైశాల్యములు ప్రత్యేకముగా గణింపబడిన పట్టికలలో ఉంటాయి.

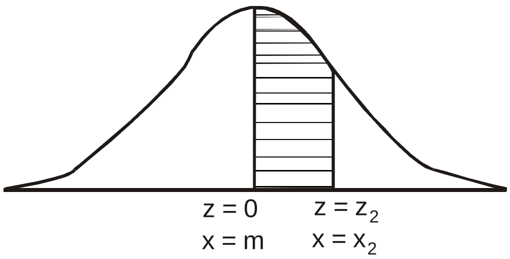
ఇవి అనేక విశ్లేషణ గణనలలో ఉపయోగపడతాయి. అవి ఈ పుస్తకములో కూడా పొందుపరచినాము. వీటినే క్రమసామాన్య విభాజనాల వైశాల్యాల పట్టికలు (Areas of Standard Normal Distribution) అంటాము.

$\frac{x-m}{\sigma} = z$ అయితే, అంటే సామాన్య యాదృచ్ఛిక xను క్రమసామాన్య యా.చ. zగా మారిస్తే

$x-m=\sigma z$, $dz=\sigma dz$ అవుతాయి.

$x=m$ అయితే $z=\frac{m-m}{\sigma}=0$ను $x=x_2$ అయితే

$z=\frac{x_2-m}{\sigma} = z_2$ అవుతుంది.

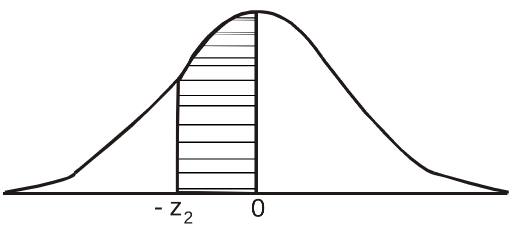


$$\therefore p(m<x<x_2) = p(0<z<z_2)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^z e^{-z^2/2}\, dz = \int_0^{z^2} \phi(z)dz$$

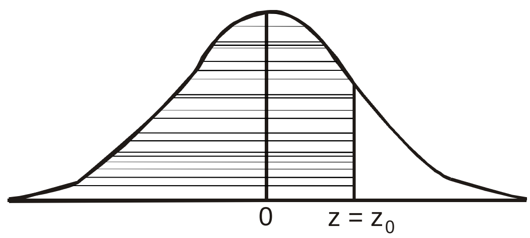
$\phi(z)$ ముందు నిర్వచించబడినట్లు $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}$, $-\infty < z < \infty$ నిశ్చిత సమాకలిని $\int_0^{z^2} \phi(z)dz$ను సామాన్య సంభావ్యత సమాకలని అంటారు.

ఇది $z=z_2, z=0$ల వద్ద గల ద్వితీయ నిరూపకములకు వాటి మధ్యనున్న క్రమసామాన్య వక్రానికి, xఅక్షానికి గల వైశాల్యాన్ని యిస్తుంది.



$x_2 < m$ అయితే $P(x_2 < x < m) = p(-z_2 < z < 0)$ క్రమ సామాన్య విభాజకం యొక్క సౌష్టవ లక్షణం వల్ల $\int_0^{z^2} \phi(z)dz$ అవుతుంది. ఇది పటంలో స్తరించిన వైశాల్యము.

(2) $x_0 > m$ అయితే $p(x < x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} e^{-\frac{(x-m)^2}{n\sigma^2}} dz$



$z = \frac{x-m}{\sigma}$ సంబంధం వల్ల

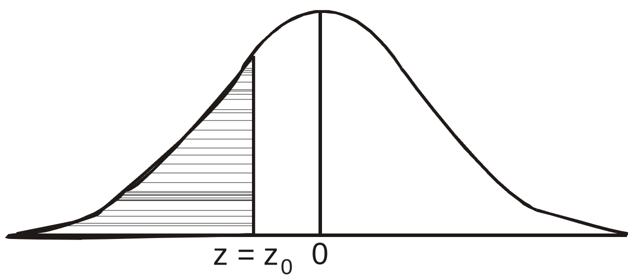
$\frac{x_0 - m}{\sigma} = z$ అయితే

$$p(x > x_0) = p(z < z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_0} e^{-z^2/2}\, dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \phi(z)dz + \int_{0}^{z_0} \phi(z)dz$$

$= \frac{1}{2} + \int_0^{z_0} \phi(z)dz$ ఇక్కడ $z < z_0$ యొక్క సంభావ్యత z_0 వద్దనున్న ద్వితీయ నిరూపకానికి, క్రమసామాన్య వక్రానికి, x అక్షానికి మధ్య గల వైశాల్యాన్ని ఇస్తుంది.

దీనిని పటంలో గుర్తించినారు. $x_0 < m$ అయితే $z_0 < 0$ అవుతుంది.



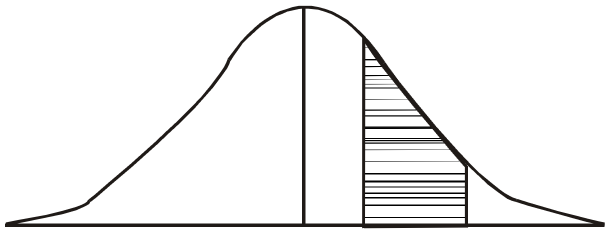
ఈ పరిస్థితిలో $p(x<x_0)=p(z<z_0)=\int_{-\infty}^{-z_0}\phi(z)dz$

$$=\int_{-\infty}^{0}\phi(z)dz-\int_{-\infty}^{0}\phi(z)dz=\frac{1}{2}-\int_{0}^{z_0}\phi(z)dz$$

3. $x_2>x_1>m$ అయితే x, x_1, x_2 ల మధ్య ఉండే సంభావ్యత

$$p(x_1<x<x_2)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx=\int_{z_1}^{z_2}\phi(z)dz$$

$$=\int_{0}^{z_2}\phi(z)dz-\int_{0}^{z_1}\phi(z)dz$$



ఎందుకంటే $z=\frac{x-m}{\sigma}$ సంబంధం వల్ల $\frac{x_1-m}{\sigma}=z_1>0, \frac{x_2-m}{\sigma}=z_2>z_1$

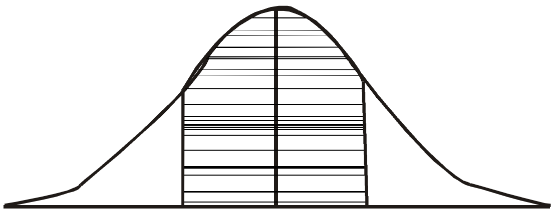
$\therefore x, x_1, x_2$ ల మధ్య ఉండే సంభావ్యత z, z_1, z_2 ల మధ్య ద్వితీయ నిరూపకాల మధ్యను, క్రమసామాన్య వక్రానికి $x-$ అక్షానికి మధ్య గల వైశాల్యానికి సమానము. దీనిని పటంలో చూపినాము.

$x_1<m<x_2$

$p(x_1<x<x_2)=p(-z_1<z<z_2)$

$$=\int_{0z_1}^{z_2}\phi(z)dz=\int_{-z_1}^{0}\phi(z)dz+\int_{0}^{z_2}\phi(z)dz$$

$$=\int_{0z_1}^{z_1}\phi(z)dz+\int_{0}^{z_2}\phi(z)dz$$ దీనిని పటంలో చూడవచ్చును.



$x_1 < x_2 < m$ అయితే $p(x_1 < x < x_2) = p(-z_2 < z < -z_1) = \int_{-z_2}^{z_1} \phi(z)dz$ క్రమసామాన్య విభాజనం యొక్క సౌష్టవ లక్షణం వల్ల $= \int_{-z_1}^{z_2} \phi(z)dz$

13.5 ఇచ్చిన దత్తాంశానికి సామాన్య విభాజనాన్ని సంధానించడం :

మొట్టమొదట ఇచ్చిన దత్తాంశం యొక్క సరాసరి క్రమవిచలనము కనుగొనవలె. ఆ దత్తాంశానికి సంధానించవలసిన సామాన్య సం. సాంద్ర.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty \text{ --------- } (1)$$

(1)లో m, σ విలువలు తెలియకపోవడం వల్ల, వాటిని దత్తాంశము యొక్క సరాసరి క్రమవిచలనంతో అంచనా వేయవలెను. i తరగతి యొక్క దిగువ అవధి yi అయితే

$$z_i = \frac{y_i - m}{\sigma}$$ కనుక్కోవలె.

z_1

$$\int_{-\infty}^{Z_1} \phi(z)dz$$ కనుగొనవలెను.

అదే విధంగా తరగతి ఎగువ అవధి $y_i + 1$ అయితే $z_i + 1$. $z + 1 = \int_{-\infty}^{z_i+1} \phi(z)dz$ లను కనుక్కోవలె. i వ అంతరం వైశాల్యం యొక్క వైశాల్యము $\int_{z_i}^{z_i+1} \phi(z)dz$ అవుతుంది. i యొక్క తదితర విలువలకు $i = 1, 2, 3, ...$ మిగిలిన

అంతరాల వైశాల్యములు వస్తాయి. ఈ వివిధ అంతరాల వైశాల్యాలను మొత్తము పౌనఃపున్యాల సంఖ్య N తో గుణిస్తే ఆయా అంతరాలలోని అశంశిత పౌనఃపున్యాలు వస్తాయి.

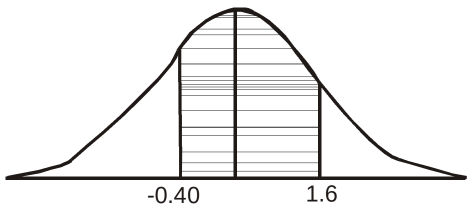
ఉదా - 1 : X, N (2, 25) అయితే $p(0<x<10),(-8<x,1)$ లను కనుగొనుట :

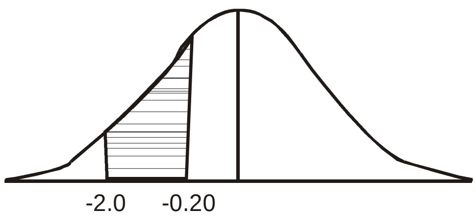
జవాబు : $$p(0<x<10)=p\left(\frac{-2}{5}<z<\frac{8}{5}\right)$$

ఎందుకంటే $z=\dfrac{x-2}{5}$

$$=\int_{-0.4}^{1.6}\phi(z)\,dz=\int_{0}^{1.6}\phi(z)\,dz+\int_{0}^{0.4}\phi(z)\,dz$$

$= 0.4452 + 0.1554 = 0.6006$ (పట్టికల నుంచి)





ఇదే విధంగా $p(-8<x<1)=p(-z<z<-0.2)$

$$=\int_{-\infty}^{-0.2}\phi(z)\,dz-\int_{-\infty}^{-2.0}\phi(z)\,dz$$

$=0.4772-0.0793=0.3979$ (పట్టికల నుంచి)

ఉదా - 2 : m సరాసరి, σ క్రమవిచలనము గల సామాన్య విభాజనంలో సామాన్య యాదృచ్ఛిక $X, 60$ కింద ఉండటానికి సంభావ్యత 0.10, 90 కన్న పైన ఉండే సంభావ్యత = 0.05 అయితే m,σ విలువ ఎంత ?

జవాబు : $X, N(m, \sigma)$

$\therefore p(x<60)=0.10 . P(x<90)=0.95$ అని ఇచ్చినారు.

$$\therefore \phi\left(\frac{60-m}{\sigma}\right)=0.10$$

$$\therefore \phi\left(\frac{90-m}{\sigma}\right)=0.95$$

క్రమసామాన్య విభాజన పట్టీల నుంచి,

$$\frac{60-m}{\sigma}=-1.282$$

$$\frac{90-m}{\sigma}=1.645$$

ఈ పై రెండింటి సమీకరణాల నుంచి

$$m=73.1 \qquad \sigma=10.2$$

ఉదా - 3 : సరాసరి 68.22" విస్తృతి = 10.8" గల సామాన్య విభాజనాన్ని సైనికుల ఎత్తులు అనుసరిస్తే 1000 మంది సైనికులలో ఎంత మంది 6 కంటే పొడుగ్గా వుంటారు ?

జవాబు : $\mathrm{X}, \mathrm{N}(68,22,10.8)$ కావటం వల్ల

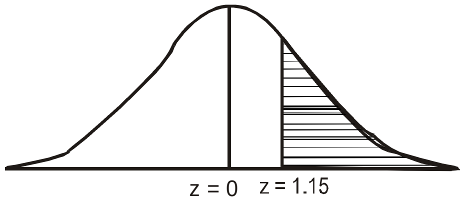
$p(x>72)$ విలువ కనుక్కోవలె. ఇక్కడ x, అంగుళాలను ఎత్తులను సూచిస్తుంది.

$$z=\frac{x-m}{\sigma}=\frac{72-68.22}{\sqrt{10.8}}=1.15$$

$$\therefore\ p(x>72)=p(z>1.15)$$

$z=0$ వద్ద నున్న ద్వితీయ నిరూపకానికి క్రమసామాన్య వక్రానికి, $x-$అక్షానికి మధ్య గల వైశాల్యము = 0.5.

$$\therefore p(z>1.15) 0.5-p(0<z<1.15)=0.5=0.3>46$$



$\therefore$ 1000 మంది సిపాయిలలో 6 కన్నా ఎక్కువ పొడవు గల వారి సంఖ్య

$$=1000\times 0.1254 = 125.4 \cong 125$$

ఉదా - 4 : కపాలాలను పొడుగు, వెడల్పుల సూచిక ప్రకారము 75 క్రింద వున్న వానిని 75 కి 80కి మధ్య వున్న వానిని 80 కంటే ఎక్కువగా ఉన్న వానిని వరుసగా A, B, C అనే మూడు తరగతులలో విభజించినారు. $A, 58\%$, $B, 38\%$, $C, 4\%$ ఉన్న సామాన్య విభాజనం ఊహించుకొని దాని యొక్క సరాసరి, క్రమవిచలనము కనుక్కోండి ?

జవాబు : పొడవు వెడల్పు సూచికను x అన్న యాదృచ్ఛికతో సూచించినారనుకోండి.

$$p(x<75) = 0.58$$

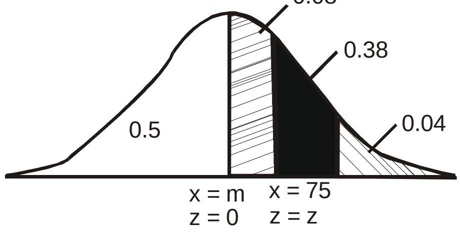
$$p(x>80)=0.04$$

$p(x<75), x=75$ వద్ద నున్న ద్వితీయ నిరూపకానికి ఎడమవైపున వున్న సామాన్య వక్రము కింది వైశాల్యాన్ని చూపిస్తుంది. అదే విధంగా $p(x>80)\, x=80$ వద్ద నున్న ద్వితీయ నిరూపకానికి కుడివైపున ఉన్న సామాన్య వక్రము క్రింది వైశాల్యాన్ని చూపిస్తుంది.

$=N(0,1)$ అయితే

$$p(0<z<z_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{z_0} e^{\frac{-z^2}{2}}\, dz$$ అవుతుంది.

$x, N(m,\sigma)$ అయితే $z=\dfrac{x-m}{\sigma}$ అయితే



$\frac{75-m}{\sigma}=z_1, \frac{85-m}{\sigma}=z_2$ అనుకోండి.

$$p(X<75)= p(z<z_1)=0.58$$

$$\therefore p(0<z<z_1)=0.08$$

అంటే $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{z_1} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = 0.08$ పట్టీల నుంచి z విలువ 0.20

$$p(x>80)= p(z_1>z_2) = 0.04$$

అంటే $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{z_2} e^{\frac{-z^2}{2}} dz = 0.46 \quad z_2=1.75$

$$\sqrt{\therefore \frac{75-m}{\sigma}=0.20} \therefore \frac{80-m}{\sigma}=1.75$$

ఈ రెండు సమీకరణాలను బట్టి $m=74.4, \sigma=3.2$.

ఉదా - 5 : ఒక పరీక్షలో ఒక విద్యార్థికి 30% అంతకంటే ఎక్కువ గానీ మార్కులు వస్తే ఆ విద్యార్థి కృతార్థుడవుతాడు. విద్యార్థికి 60% అంతకంటే ఎక్కువ 45% 60%కు మధ్య 30%, 45%కు మధ్య వస్తే అతనిని వరుసగా మొదటి రెండు, మూడు తరగతులలో ఉంచుతారు. విద్యార్థికి 80% అంతకంటే ఎక్కువ వస్తే అతనికి ఘనత వస్తుంది. పరీక్ష ఫలితాలను బట్టి 10%, పరీక్షలలో తప్పినారు 5% ఘనత పొందినారు. రెండో తరగతికి చెందిన విద్యార్థుల శాతము కనుక్కోండి ?

జవాబు : మార్కులు సామాన్య విభాజనాన్ని కలిగివున్నాయనుకోండి. పరీక్షలో విద్యార్థికి 100కి వచ్చిన మార్కుల సంఖ్య యాదృచ్ఛిక y అనుకోండి. $x, N(m,\sigma)$.

$$\left.\begin{array}{l} p(x<30)=0.10 \\ p(x\geq 80)=0.05 \end{array}\right\} \text{ ఇచ్చినారు.}$$

$z_1=\frac{x-m}{\sigma}$ అయితే

$\frac{30-m}{\sigma}=-z_1, \frac{80-m}{\sigma}=z_2$ అనుకోండి.

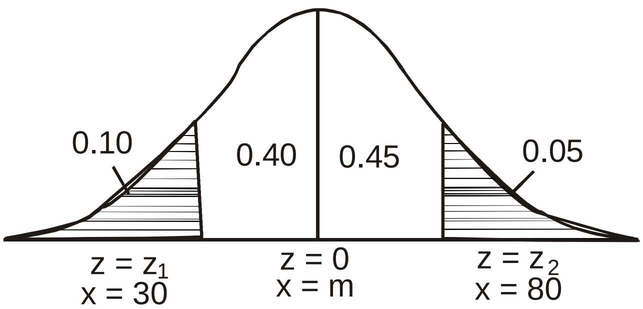
$$\therefore p(0<z_1<z_2) = 0.50-0.05 = 0.45$$

$$\therefore p(0<z_1<z_2)=p(-z_1<z<0) = 0.50-0.10=0.40$$

కాబట్టి క్రమ సామాన్య విభాజన పట్టీల నుంచి

$$z_1=1.28; \qquad z_2=1.64$$

$$\therefore \frac{30-m}{\sigma} = -1.28 \text{ లేదా } \frac{m-30}{\sigma} = 1.28$$



$$\frac{80-m}{\sigma}=1.64$$

$z=\dfrac{x-52}{17.12}, x=45$ అయితే $z=-0.41; x=60$ అయితే

$z=0.47$ కాబట్టి $p(-0.41<z<0.47)$

$$=p(0<z<0.41)+p(0<z<0.47)$$

$$=0.1591+0.1808 = 0.34$$

$\therefore$ 34% విద్యార్థులు రెండోతరగతికి చెందినవారు.

ఉదా - 6 : ఒక పరీక్షలో 1000 మంది విద్యార్థులను వారి మార్కులలో అవరోహణ క్రమమును బట్టి I, II, III తరగతులలో చేర్చినారు. మొదటి రెండు తరగతులలో సంఖ్య వరుసగా 50, 350 రెండో తరగతిలో అత్యధిక అత్యల్పము మార్కులు వరుసగా 60, 50. సామాన్య విభాజనాన్ని ఊహించి మార్కుల సరాసరి 48.2 అని విచలనము 7.1 అని చూపండి ?

జవాబు : మూడో తరగతికి చెందిన విద్యార్థులు = 1000 - (350 + 5) = 600

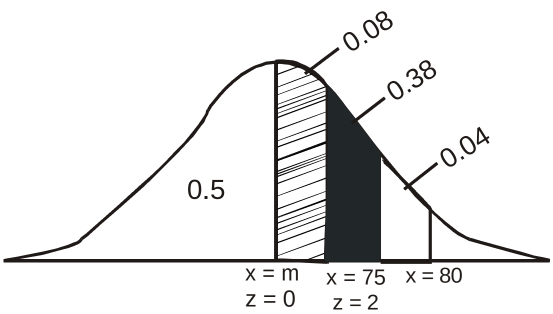
$\therefore$ మొత్తం విద్యార్థులలో 0.6 మూడో తరగతికి చెందినవారు.

కాబట్టి $x=50$ వద్ద నున్న ద్వితీయ నిరూపకానికి, సామాన్య వక్రానికి $x-$అక్షానికి మధ్య వున్న వైశాల్యము = 0.6.

$z-\dfrac{x-m}{\sigma}$ అయితే $z_1=\dfrac{50-m}{\sigma}$ అంటే

z_1 వద్దనున్న ద్వితీయ నిరూపకానికి సామాన్య వక్రానికి $x-$అక్షానికి మధ్య ఉన్న వైశాల్యము = 0.6 - 0.5 = 0.1.

పట్టికలను బట్టి = $\dfrac{50-m}{\sigma}=z=0.254$.



మొదటి తరగతికి చెందిన విద్యార్థుల సంఖ్య మొత్తము విద్యార్థులలో 0.05 అంటే $x=60$ వద్ద ద్వితీయ నిరూపకానికి సామాన్య వక్రము కింద కుడివైపున వున్న వైశాల్యము = 0.05.

$$z_2=\frac{60-m}{\sigma} \text{ అయితే}$$

$0, z_2$ ద్వితీయ నిరూపకాలను, సామాన్య వక్రానికి మధ్యనున్న వైశాల్యము = 0.50 - 0.05 = 0.45, కాబట్టి పట్టీల నుంచి $z_2=1.45$

కాబట్టి $\dfrac{50-m}{\sigma}=0.254$

$$\frac{60-m}{\sigma}=1.65$$

ఈ రెండు పై సమీకరణాల నుంచి

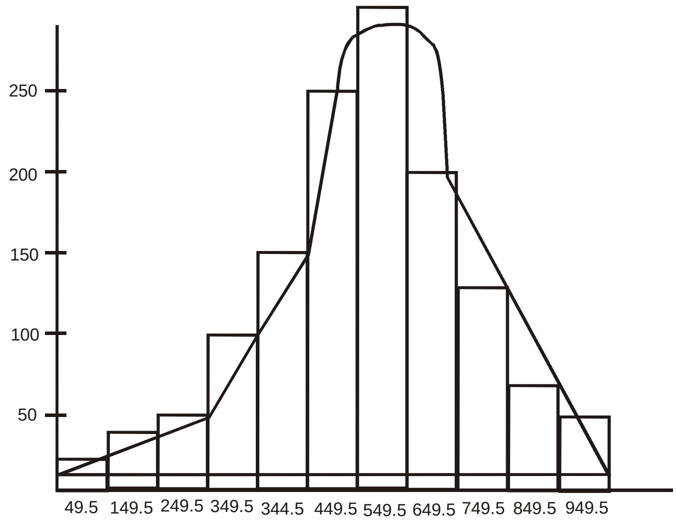
$$m=48.2,\ \sigma=7.1$$

ఉదా - 7 : ఈ క్రింది దత్తాంశము 1000 టెలిఫోను సంభాషణలను అంతరాలలో ఇవ్వబడినది. దాని సోపాన చిత్రానికి సామాన్య విభాజనాన్ని సంధానించండి.

0.5 - 99.5	-	6
99.5 - 199.5	-	28
199.5 - 299.5	-	88
299.5 - 399.5	-	180
399.5 - 499.5	-	247
599.5 - 699.5	-	133
699.5 - 799.5	-	42
799.5 - 899.5	-	11
899 - 999	-	5

జవాబు : అంతరాలలో పౌనఃపున్యాలు, ఇంతకుముందు (Q.T. - I లో) నేర్చుకున్న పద్ధతుల ద్వారా, ఇచ్చిన విభాజనానికి అంకమధ్యమము, క్రమవిచలనములను గణించగా 475, 251 అవుతాయి.

తరగతి అంతరాలు	$z=\frac{x-475}{251}$	z కి ఎడమవైపు గల వైశాల్యము = A	z కి ఎడమవైపు గల వైశాల్యము = ΔA	సైద్ధాంతిక పౌనఃపున్యాలు $n\Delta n$	పరిశీలిత పౌనఃపున్యాలు
99.5	-2.49	0.00	0.0064	6.4	6
199.5	-1.82	0.03	0.0287	28.3	28
299.5	-1.16	0.12	0.0886	88.6	88
399.5	-0.50	0.30	0.1885	185.5	140
499.5	0.16	0.56	0.2551	255.1	247
599.5	0.82	0.79	0.2303	230.3	260
699.5	1.49	0.93	0.1380	138.0	133
799.5	2.15	0.98	0.0523	52.3	52
899.5	2.81	0.99	0.0133	13.3	11
999.5	3.48	0.79	0.0022	2.2	5



సామాన్య విభాజనానికి సోపానమును సంధానించుట

13.6 అభ్యాసాలు :

(ఎ) ఈ క్రింది వానికి సంక్షిప్తంగా సమాధానాలు వ్రాయండి.

1. సామాన్య విభాజనంను నిర్వచించి దాని లక్షణాలను పేర్కొనుము ?

2. సామాన్య విభాజనం యొక్క ప్రాముఖ్యత పేర్కొనుము ?

3. సామాన్య విభాజనం యొక్క అశంసిత విలువ ఘాతికలను రాబట్టండి ?

4. సామాన్య విభాజనం యొక్క సరాసరి m నుంచి మధ్యమ విచలనం రాబట్టండి ?

5. సామాన్య విభాజనం యొక్క బాహుళకమును రాబట్టండి ?

6. సామాన్య విభాజనం యొక్క మధ్యగతము రాబట్టండి ?

7. సామాన్య విభాజనం యొక్క వైశాల్య లక్షణాలను క్లుప్తంగా వివరించండి.

8. ఇచ్చిన దత్తాంశానికి సామాన్య విభాజనాన్ని సంధానించండి ?

9. సామాన్య విభాజనం యొక్క దోషప్రమేయాలు గురించి వివరించండి.

10. $x, N(2,25)$ అయితే $p(0<x<10), (-8<x<1)$ లను కనుక్కోండి.

(బి) ఈ క్రింది వాటికి విపులంగా జవాబులు వ్రాయండి.

1. సామాన్య విభాజనం యొక్క పరిచయమును వివరించి, నిర్వచనము మరియు లక్షణములను పేర్కొనుము ?
2. సామాన్య విభాజనమును నిర్వచించి దాని లక్షణములను మరియు దాని ప్రాముఖ్యతను వివరింపుము ?
3. సామాన్య విభాజనం యొక్క ప్రాముఖ్యతను వివరించి, దాని యొక్క అశంసిత విలువ మరియు ఘాతికలను రాబట్టండి?
4. సామాన్య విభాజనం యొక్క సరాసరి m నుంచి మధ్యమ విచలనము రాబట్టండి? సామాన్య విభాజనం బాహుళకమును కనుక్కోండి.
5. సామాన్య విభాజనం యొక్క బాహుళకము మరియు మధ్యగతమును రాబట్టండి ?
6. సామాన్య విభాజనం యొ క్క వైశాల్య లక్షణాలు వివరించండి ?
7. సామాన్య విభాజనం యొక్క దోషప్రమేయాలు వివరించి, ఇచ్చిన దత్తాంశానికి సామాన్య విభాజనంను సంధానించండి?
8. సామాన్య విభాజనం యొక్క వైశాల్యలక్షణాలు వివరించి, దాని దోషప్రమేయాలు వివరించండి ?

రచయిత

డా॥ కె. చందన్

పాఠం 14

అవకలనము - గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలను తెలుసుకోగలరు.

* ఈ పాఠంలో ప్రమేయాల అవకలనజములను కనుగొనుట, అవకలనమును ఉపయోగించి ఒక ప్రమేయము యొక్క అంత్య (గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు) కనుగొనుటను తెలుసుకుంటాము.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

14.1 ఉపోద్ఘాతం:

మనము ఏదైనా రెండు భావనలను పరిశీలిస్తున్నప్పుడు వాటిలో ఒకటి మరొక దానికి కారణము అవుతుందా అన్నది ఆలోచిస్తాము. ఆ విధంగా పరస్పరం సంబంధం కలిగి వుండే భావనలలో సాధారణంగా ఒకటి కారణం, మరొకటి దాని ప్రభావం అవుతుంది. కారణాన్ని స్వతంత్ర భావన (చలరాశి), ప్రభావాన్ని అస్వతంత్ర భావన (చలరాశి) అంటాము. ఒక వ్యక్తి ఎత్తు అతని వయస్సు పై ఆధారపడుతుంది అనే విషయాన్ని ఉదాహరణగా తీసుకుంటే ఇక్కడ వయస్సు కారణం (Cause), ఎత్తు ప్రభావం (Effect) అవుతాయి. వయస్సులో మార్పు వస్తూ వుంటే ఒక శిశువు యొక్క ఎత్తు ఎంత వరకు ఎదుగుతుంది. అనంతంగానా? లేదా ఒక హద్దు దాటి, ఎంత వయస్సుకైనా ఎత్తు మారకుండా ఉంటుందా ? అని మనం ప్రశ్నించుకుంటే ఎంత వయస్సు వారికైనా (అనగా వయస్సు ఎంత మారినా) ఎత్తు కొంత హద్దును దాటదు అని మనం గమనిస్తూ ఉంటాము. ఇక్కడ చలరాశులు వయస్సు ఎత్తుల మధ్య సంబంధమును పరిశీలించుటలో మనము ఎత్తుకి హద్దుని వయస్సు దృష్ట్యా గమనిస్తాము గాని ఎత్తు దృష్ట్యా వయస్సుకి హద్దుని ఆలోచించటం లేదు. అనగా స్వతంత్ర చలరాశి దృష్ట్యా అస్వతంత్ర చలరాశికి హద్దుని ఊహిస్తున్నాము.

గణిత శాస్త్రములో స్వతంత్ర, అస్వతంత్ర చలరాశుల మధ్య సంబంధాన్ని ప్రమేయమని, స్వతంత్ర చలరాశి దృష్ట్యా అస్వతంత్ర చలరాశి యొక్క హద్దుని ప్రమేయానికి అవధి అంటాము. ఈ పాఠ్యాంశములో ప్రమేయాలు అవధులు, వాటి ద్వారా అవకలన గుణకములు ఒక ప్రమేయ సంబంధానికి వాటి ద్వారా గరిష్ట, కనిష్ట విలువలు రాబట్టే పరిస్థితులు తెలుసుకుందాము.

14.2 అవధి :

ఒక చరరాశి x, వాస్తవ సంఖ్య aను సమీపిస్తున్నప్పుడు xలోని ప్రమేయము $f(x)$ సమీపించే స్థిరవిలువను ప్రమేయము $f(x)$ యొక్క అవధి అంటారు.

$x \to a$ అయినపుడు $f(x) \to \ell$ ను సమీపిస్తుంది, అని సూచిస్తాము ఇక్కడ ℓ వాస్తవ సంఖ్య.

14.2.1 నిర్వచనము : ఒక చరరాశి x ఒక వాస్తవ సంఖ్య a ను అతి దగ్గరగా సమీపిస్తున్నపుడు, $f(x)$ కు మరియు ఒక వాస్తవ సంఖ్య ℓ కు మధ్య తేడా అతి చిన్నది అయితే ℓ ను $f(x)$ ప్రమేయము యొక్క అవధి అంటారు. దీనిని $\underset{x \to a}{Lt} f(x) = \ell$ అని సూచిస్తాము.

14.2.2 అవధులపై సిద్ధాంతములు (Theorems on Limits) :

1. $\underset{x \to a}{Lt} f(x) = \ell$, $\underset{x \to a}{Lt} f(x) = m$ అయితే $\ell = m$ అవుతుంది.

2. $f(x) = c$, ఒక స్థిర ప్రమేయము అయినపుడు $\underset{x \to a}{Lt} f(x) = c$ అవుతుంది.

3. $\underset{x \to a}{Lt} f(x) = \ell$ మరియు $\underset{x \to a}{Lt} g(x) = m$ అయినపుడు $\underset{x \to a}{Lt} (f+g)(x) = \ell + m$

4. $\underset{x \to a}{Lt} f(x) = \ell$ మరియు $\underset{x \to a}{Lt} g(x) = m$ అయినపుడు $\underset{x \to a}{Lt} (f-g)(x) = \ell - m$

5. $\underset{x \to a}{Lt} f(x) = \ell$ మరియు $\underset{x \to a}{Lt} g(x) = m$ అయినపుడు $\underset{x \to a}{Lt} (f\,g)(x) = \ell m$

6. $\underset{x \to a}{Lt} f(x) = \ell$ మరియు c ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయినపుడు $\underset{x \to a}{Lt} (cf)(x) = c\ell$ అవుతుంది.

7. $\underset{x \to a}{Lt} f(x) = \ell$ మరియు $\underset{x \to a}{Lt} g(x) = m$ అయినపుడు $\underset{x \to a}{Lt} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\ell}{m}$, $m \neq 0$

8. $\underset{x \to a}{Lt} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\underset{x \to a}{Lt} f(x)}$

9. $\underset{x \to a}{Lt} \log f(x) = \log \underset{x \to a}{Lt} f(x)$, $\underset{x \to a}{Lt} f(x) > 0$

10. **ఎడమ అవధి :** చరరాశి x అవధికి ఎడమ వైపు నుంచి a ను సమీపించిన, ప్రమేయము యొక్క అవధిని ఈ క్రింది విధముగా చెప్తాము.

$$\underset{x \to a^-}{Lt} f(x) = \underset{h \to 0}{Lt} f(a-h) \text{ or } \underset{h \to 0}{Lt} f(a-0) \text{ or } \underset{h \to 0}{Lt} f(a-)$$

11. కుడి అవధి : చరరాశి x అవధికి కుడి వైపు నుంచి aను సమీపించిన, ప్రమేయము యొక్క అవధిని ఈ క్రింది విధముగా చెప్తాము.

$$\underset{x \to a^+}{Lt} f(x) = \underset{h \to 0}{Lt} f(a+h) \text{ or } \underset{h \to 0}{Lt} f(a+0) \text{ or } \underset{h \to 0}{Lt} f(a+)$$

12. $\underset{x \to a}{Lt} f(x) = \ell \Leftrightarrow \underset{x \to a}{Lt} \{ f(x) - \ell \} = 0$

13. $\underset{x \to a}{Lt} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\underset{x \to a}{Lt} f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$

14. $\underset{x \to a}{Lt} f^n(x) = \left[\underset{x \to a}{Lt} f(x) \right]^n = \ell^n$

15. $\underset{x \to a}{Lt} e^{f(x)} = e^{\underset{x \to a}{Lt} f(x)} = e^{\ell}$

14.2.3 ప్రామాణిక అవధులు :

1. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{e^x - 1}{x} = \log e = 1$

2. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{a^x - 1}{x} = \log_e a$

3. $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}, a > 0$

4. $\underset{x \to 0}{Lt} \log(1+x)^{1/x} = \log e = 1$

5. $\underset{x \to 0}{Lt} (1+x)^{1/x} = e$

6. $\underset{x \to 0}{Lt} \left[\dfrac{(1+x)^n - 1}{x} \right] = n$

7. $\underset{x \to \infty}{Lt} \left(1 + \dfrac{1}{x} \right)^x = e$

8. $\underset{x \to -\infty}{Lt} \left(1 + \dfrac{1}{x} \right)^x = e$

9. $\underset{x \to \infty}{Lt} \ x^n = 0, \ -1 < x < 1$ అయినపుడు

10. $\underset{x \to 0}{Lt} \ e^x = 1$

ఉదా : 1 $\underset{x \to 2}{Lt} \left(x^2 - 4x + 3 \right)$

$= \underset{x \to 2}{Lt} \left(x^2 \right) - \underset{x \to 2}{Lt} (4x) + \underset{x \to 2}{Lt} (3)$

$= 2^2 - 4 \underset{x \to 2}{Lt} \ x + 3$

$= 4 - 8 + 3 = -1$

ఉదా : 2 $\underset{x \to 3}{Lt} (x-4)(x+5)$ విలువ కనుగొనుము.

$$\underset{x \to 3}{Lt} (x-4)(x+5) = \underset{x \to 3}{Lt} (x-4) . \underset{x \to 3}{Lt} (x+5) = \left(\underset{x \to 3}{Lt} \ x - \underset{x \to 3}{Lt} \ 4 \right) \left(\underset{x \to 3}{Lt} \ x + \underset{x \to 3}{Lt} \ 5 \right)$$

$= (-1)(8) = -8$

ఉదా : 3 $\underset{x\to 2}{Lt}\, 5x^3+3x^2-2x$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\underset{x\to 2}{Lt}\left(5x^3+3x^2-2x\right) = \underset{x\to 2}{Lt}\left(5x^3\right)+\underset{x\to 2}{Lt}\left(3x^2\right)-\underset{x\to 2}{Lt}\, 2x$

$$=5\underset{x\to 2}{Lt}\, x^3+3\underset{x\to 2}{Lt}\, x^2-2\underset{x\to 2}{Lt}\, x$$

$$=5\times 2^3+3\times 2^2-2\times 2$$

$$= 5\times 8+3\times 4-4 = 48$$

ఉదా : 4 $\underset{x\to 0}{Lt}\left(\frac{x+8}{3x+11}\right)$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\underset{x\to 0}{Lt}\frac{x+8}{3x+11} = \frac{\underset{x\to 0}{Lt}\,(x+8)}{\underset{x\to 0}{Lt}\,(3x+11)} = \frac{\underset{x\to 0}{Lt}\, x+\underset{x\to 0}{Lt}\, 8}{\underset{x\to 0}{Lt}\, 3x+\underset{x\to 0}{Lt}\, 11}$

$$=\frac{0+8}{0+11} = \frac{8}{11}$$

ఉదా : 5 $\underset{x\to 2}{Lt}\frac{1}{x^5}$ కనుగొనుము.

జవాబు : $\underset{x\to 2}{Lt}\frac{1}{x^5} = \frac{1}{\underset{x\to 2}{Lt}\, x^5} = \frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$

ఉదా : 6 $\underset{x\to 10}{Lt}\log_e x^3$ విలువ ఎంత ?

జవాబు : $\underset{x\to 10}{Lt}\log_e x^3 = \log_e \underset{x\to 10}{Lt}\, x^3 = \log_e 10^3 = 3\log_e 10$

ఉదా : 7 $\underset{x\to \infty}{Lt}\frac{x+9}{2x+5}$ విలువ కనుగొనుము ?

జవాబు : $\underset{x\to\infty}{Lt}\ \dfrac{x+9}{2x+5} = \dfrac{\underset{x\to\infty}{Lt}\ x+9}{\underset{x\to\infty}{Lt}\ 2x+5}$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+9}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+5}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 1+\dfrac{9}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 2+\dfrac{5}{x}}$$

$$= \frac{1+0}{2+0} = \frac{1}{2} \qquad \because x\to\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\to 0;\ \ \frac{9}{x},\frac{5}{x}\to 0$$

ఉదా : 8 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+3x-2}{(x-2)(x+3)}$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+3x-2}{(x-2)(x+3)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} 5x^2+3x-2}{\lim\limits_{x\to\infty} (x-2)(x+3)}$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2+3x-2}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x-2)(x+3)}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \left(5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{x}\right)\left(1+\dfrac{3}{x}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \left(5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{2}{x}\right) \lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)} = \frac{5+0}{1\times 1} = 5 \qquad \because x\to\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\to 0$$

$$\frac{3}{x},\frac{2}{x^2},\frac{2}{x},\frac{3}{x}\to 0$$

ఉదా : 9 $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x} \dfrac{\left(x^2+7x+9\right)}{(x+3)(x+7)} = 0$ నిరూపించుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x}\dfrac{\left(x^2+7x+9\right)}{(x+3)(x+7)} = \lim\limits_{x\to\infty} 2^{-x}\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+7x+9\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)(x+7)}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x}\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+7x+9}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+3)(x+7)}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2^x}\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{7}{x}+\dfrac{9}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\left(1+\dfrac{7}{x}\right)}$$

$$0\times\frac{(1+0)}{(1+0)(1+0)} = 0 \qquad \because x\to\infty \Rightarrow \frac{1}{x}\to 0,\ \frac{7}{x},\frac{9}{x^2},\frac{3}{x},\frac{7}{x}\to 0$$

$$x\to\infty \Rightarrow \frac{1}{2^x}\to 0$$

ఉదా : 10 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ ను ఎడమవైపు నుంచి కనుగొనుము.

(లేదా) $x\to 0$ అయినపుడు $\dfrac{1}{x}$కు ఎడమ అవధిని కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a-h)$

$$\therefore \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{(0-h)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{-h} = \frac{-1}{0} = -\infty$$

ఉదా : 11 $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+3x\right)$ ఎడమ వైపు నుంచి కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a-h)$ అని తెలుసు.

$$\lim_{x\to a^-}\left(x^2+3x\right) = \lim_{h\to 0}\left\{(3-h)^2+3(3-h)\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0}(3-h)^2+3\lim_{h\to 0}(3-h) = (3-0)^2+3(3-0) \quad = 9+9 \quad = 18$$

ఉదా : 12 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x}$ ను కుడివైపు నుంచి కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$ అని తెలుసు.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{0+h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} = \frac{1}{0} = \infty$$

ఉదా : 13 $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^2+3x\right)$ ను కుడివైపు నుంచి కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)$ అని తెలుసు.

$$\lim_{x\to 3^+}\left(x^2+3x\right) = \lim_{h\to 0}(3+h)^2 + \lim_{h\to 0} 3(3+h)$$

$$=(3+0)^2+3(3+0)=9+9=18$$

ఉదా : 14 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+5x+6}{2x^2-3x}$ విలువ కనుగొనండి.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+5x+6}{2x^2-3x} = \frac{\lim\limits_{x\to 2} x^2+5x+6}{\lim\limits_{x\to 2} 2x^2-3x}$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to 2} x^2 + 5\lim\limits_{x\to 2} x + \lim\limits_{x\to 2} 6}{2\lim\limits_{x\to 2} x^2 - 3\lim\limits_{x\to 2} x} = \frac{2^2+5\times 2+6}{2\times 2^2 - 3\times 2}$$

$$= \frac{4+10+6}{8-6} = \frac{20}{2} = 10$$

ఉదా : 15 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2+5}}{5x+3}$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5}}{5x+3}$ $=\frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{3x^2+5}}{\lim_{x\to\infty}5x+3}=\frac{\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+5}}{x}}{\lim_{x\to\infty}\frac{5x+3}{x}}$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{3x^2+5}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{3}{x}\right)}=\frac{\lim_{x\to\infty}\sqrt{3+\frac{5}{x^2}}}{\lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{3}{x}\right)}=\frac{\sqrt{3+0}}{5+0}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{5} \qquad \because x\to\infty\Rightarrow\frac{1}{x}\to 0,\ \frac{3}{x},\frac{5}{x^2}\to 0$$

ఉదా : 16 $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=n.a^{n-1}$ అని తెలుసును.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2^3}{x-2}=3\times 2^{3-1}=3\times 2^2=12$$

ఉదా : 17 $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ విలువను కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=n.a^{n-1}$ అని తెలుసును.

$$\therefore \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{4}}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x^{1/2}-4^{1/2}}{x-4}$$

$$=\frac{1}{2}\times 4^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^{1/2}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

ఉదా : 18 $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^2-4}$ విలువను కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim_{x\to 2}\frac{x^4-16}{x^2-4}$ **=** $\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^4-16}{x-2}\times\frac{x-2}{x^2-4}\right)$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^4-2^4}{x-2}\times\frac{1}{\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}}=4\times 2^{4-1}\times\frac{1}{2\times 2^{2-1}}$$

$$=\frac{4\times 2^3}{2\times 2}=8$$

ఉదా : 19 $\lim_{x\to -\infty}\frac{5x^2-7x+6}{x^2+8}$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim_{x\to -\infty}\frac{5x^2-7x+6}{x^2+8}$ $=\frac{\lim_{x\to -\infty}\frac{5x^2-7x+6}{x^2}}{\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+8}{x^2}}$

$$=\frac{\lim_{x\to -\infty}5-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}}{\lim_{x\to -\infty}1+\frac{8}{x^2}}=\frac{5-0}{1+0}$$

$$=5 \qquad \because x\to -\infty\Rightarrow\frac{1}{x}\to 0,\ \ \frac{7}{x},\frac{6}{x^2},\frac{8}{x^2}\to 0$$

14.2.4 అనిర్ధార్య రూపాలు (Indeterminate forms) :

ప్రమేయాల అవధులు సాధించటంలో మనకు $\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty,\ \infty,-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$ లాంటి విలువలు నిర్ధారించలేని విలువలుగా తరచు వస్తాయి. అటువంటి వానిని అనిర్ధార్య రూపాలు అంటాము.

(i) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-9}$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-9}$

ఇచ్చిన ప్రమేయము $x=3$ వద్ద $\dfrac{0}{0}$ రూపము వస్తుంది.

అందుకని లవము మరియు హారము రెండింటికి కారణాంకాలు వ్రాసిన $(x-3)$ ఉమ్మడి కారణాంకము అగును.

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+5)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{x+3}=\frac{3+5}{3+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$$

(ii) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-2x^2-9x+4}{x^2-2x-8}$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-2x^2-9x+4}{x^2-2x-8}$

ఇచ్చిన ప్రమేయము $x=4$ వద్ద $\dfrac{0}{0}$ రూపము వస్తుంది. అందుకని లవము మరియు హారము రెండింటికి కారణాంకములు వ్రాసిన $(x-4)$ ఉమ్మడి కారణాంకము అగును.

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\left(x^2+2x-1\right)}{(x-4)(x+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{x^2+2x-1}{x+2}=\frac{4^2+2(4)-1}{4+2}$$

$$=\frac{16+8-1}{6}=\frac{23}{6}.$$

(iii) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{x^2-1}$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{x^2-1}$

ఇచ్చిన ప్రమేయము $x=1$ వద్ద $\frac{0}{0}$ రూపమునకు వస్తుంది. అందుకని ప్రమేయాన్ని $\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}$ తో అకరణీయము చేయగా

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{3+x}-\sqrt{5-x}\right)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}\right)}{\left(x^2-1\right)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(3+x)-(5-x)}{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}\right)} = \lim_{x\to1}\frac{2x-2}{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}\right)} = \lim_{x\to1}\frac{2}{(x+1)\left(\sqrt{3+x}+\sqrt{5-x}\right)}$$

$$=\frac{2}{(1+1)\left(\sqrt{3+1}+\sqrt{5-1}\right)} = \frac{2}{2(2+2)}=\frac{1}{4}$$

(iv) $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x}$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}{x}$

ఇచ్చిన ప్రమేయము $x=0$ వద్ద $\frac{0}{0}$ రూపమునకు వస్తుంది. అందుకని ప్రమేయాన్ని $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}$ తో అకరణీయము చేయగా

$$\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}\right)\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)} = \lim_{x\to0}\frac{1+x^2-1-x}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)}{x\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}\right)} = \lim_{x\to0}\frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+x}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

(v) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{mx}-1}{x}$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{mx}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{mx}-1\right)m}{mx} = m\lim\limits_{mx\to 0}\dfrac{e^{mx}-1}{mx}$

$=m\log_2 e \quad = \quad m$ $\qquad \because x\to 0$

(vi) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{-x}-1}{x}$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{-x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-1}{x} = \log\dfrac{1}{3} = \log_e 3^{-1}$

$= -\log_e 3$

(vii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{2x}-1}{x}$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{2x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^{x}-1}{x} = \log_e 4$

(viii) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{3}\right)^{1/x}$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{3}\right)^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{3}\right)^{\frac{3}{2x}\times\frac{2}{3}}$

$$=\left\{\lim\limits_{\frac{2x}{3}\to 0}\left(1+\dfrac{2x}{3}\right)^{\frac{3}{2x}}\right\}^{\frac{2}{3}} = e^{2/3} \qquad \left\{\begin{array}{l}\because x\to 0\\ \dfrac{2x}{3}\to 0\end{array}\right\}$$

(ix) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{b^x-1}=\dfrac{\log a}{\log b}$ అని చూపుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{b^x-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{a^x-1}{x}}{\dfrac{b^x-1}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{b^x-1}{x}}=\dfrac{\log a}{\log b}$

(x) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x}\log(1+x)=2$ అని చూపండి.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x}\log(1+x)=2\lim\limits_{x\to 0}\log(1+x)^{1/x}$

$$=2\log\left\{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}\right\} = 2\log e = 2$$

(xi) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log_e x}{x-1}$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\log_e x}{x-1}$

$x=1+y$ అనుకొనుము. $x-1=y$

$x\to 1\Rightarrow x-1\to 0$ i.e. $y\to 0$

$\therefore \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\log(1+y)}{y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1}{y}\log(1+y)$

$=\log\left\{\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{1/y}\right\} = \log e=1$.

(xii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x}$ విలువ కనుగొనుము.

జవాబు : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1+1-e^{-x}}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x}-1\right)-\left(e^{-x}-1\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x} = \log e + \log e = 1+1 = 2$$

14.2.5 అభ్యాసము

1. $\lim\limits_{x\to 1} 7-3x=4$ అని చూపుము.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\left(x^{2}+5\right)=14$ అని చూపుము.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7}{x+7}\right)=1$ అని చూపుము.

4. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^{2}-9}{x-3}\right)=6$ అని చూపుము.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(5x^{2}-9x+9\right)=9$ అని చూపుము.

6. $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^{2}-x+1\right)=3$ అని చూపుము.

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^{2}+1}{x-1}=14$ అని చూపుము.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ అని చూపుము.

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{x+1}=1$ అని చూపుము.

10. $\lim_{x \to 1} (2x+3)$ విలువ కనుగొనుము.

11. $\lim_{x \to 2} \left(2x^2 - 3x + 5\right)$ విలువ కనుగొనుము.

12. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+2}{3x+4}$ విలువ కనుగొనుము.

13. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ విలువ కనుగొనుము.

14. $\lim_{x \to 1} \frac{2x^3-3x^2+1}{9x^2+8x+7}$ విలువ కనుగొనుము.

15. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1-3x}-1}{x} = -\frac{3}{2}$ అని చూపండి.

16. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x} = \frac{1}{2}$ అని చూపండి.

17. $\lim_{x \to 2} \log_{10}\left[x^6 + \sqrt{x^2+1292}\right] = 2$ అని చూపండి.

18. $\lim_{x \to 3} \frac{x^3-27}{x-3}$ విలువ కనుగొనుము.

19. $\lim_{x \to 0} \frac{a^x-b^x}{x} = \log a - \log b$ అని చూపండి.

20. $\lim_{x \to 0} (1+2x)^{1/x} = e^2$ అని చూపండి.

21. $\lim_{x \to \infty} \frac{4x-3}{2x+7}$ విలువ కనుగొనుము.

22. $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+1}{x^3+5}$ విలువ కనుగొనుము.

23. $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-4}{2x^2-1}$ విలువ కనుగొనుము.

24. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n = e^{\frac{1}{2}}$ అని చూపండి.

25. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-e^{3x}}{x} = -1$ అని చూపండి.

14.3 వ్యుత్పన్నము (Derivative) :

14.3.1 నిర్వచనము : f అనే ప్రమేయము a సామీప్యంలో నిర్వచింపబడినదని అనుకోండి. $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ వ్యవస్థితమైనపుడు a వద్ద f అవకలనీయం అంటాము. ఈ అవధిని a వద్ద f అనే ప్రమేయానికి వ్యుత్పన్నము లేదా అవకలజము లేదా అవకలన గుణకము (Differential Coefficient) అని అంటాము. దీనిని $f'(a)$ తో సూచిస్తాము.

(i) x యొక్క అన్ని విలువల వద్ద $y = f(x)$ ప్రమేయము అవకలనీయమైతే $f'(x)$ అనే ప్రమేయాన్ని f యొక్క అవకలనీయ ప్రమేయం లేదా వ్యుత్పన్న ప్రమేయము(Derived function) అని అంటాము.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

14.3.2 వివిధ ప్రమేయాల వ్యుత్పన్నములు :

(i) ఘాత ప్రమేయము : $y = x^n$

$$\frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1}$$

(ii) స్థిర గుణకమున్న ప్రమేయము: $y = c\,f(x)$

$$\frac{dy}{dx}=c\frac{d}{dx}f(x)$$

(iii) స్థిర ప్రమేయము : $y=c$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(c)=0$$

(iv) e^x ప్రమేయము : $y=e^x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=e^x$$

(v) $\frac{d}{dx}\left(a^x\right)=a^x\log_e a$

(vi) $\frac{d}{dx}(u\pm v\pm w)=\frac{du}{dx}\pm\frac{dv}{dx}\pm\frac{dw}{dx}$, u,v,w లు x లో ప్రమేయములు

(vii) u,v లు x లో ప్రమేయాలైతే

$$\frac{d}{dx}(uv)=v\frac{d}{dx}(u)+u\frac{d}{dx}(v)$$

(viii) u,v,w లు x లో ప్రమేయాలైతే

$$\frac{d}{dx}(uvw)=vw\frac{d}{dx}(u)+uw\frac{d}{dx}(v)+uv\frac{d}{dx}(w)$$

(ix) u,v లు x లో ప్రమేయాలు మరియు $v\neq 0$ అయితే

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$(x)\frac{d}{dx}(\log_e x)=\frac{1}{x}$$

14.3.3 ఉదాహరణలు :

ఈ క్రింది ప్రమేయాలకు వ్యుత్పన్నములు కనుగొనుము.

ఉదా : 1 $y=x^5$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^5\right)=5x^{5-1}=5x^4$$

ఉదా : 2 $y=\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^{1/3}\right)=\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3x^{2/3}}$$

ఉదా : 3 $y=x^{4/3}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^{4/3}\right) = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

ఉదా : 4 $y=x^{-9}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^{-9}\right)=-9x^{-9-1}=-9x^{-10}$$

ఉదా : 5 $y=200 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(200)=0$

ఉదా : 6 $y = 3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3x^2\right) = 3\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=3\times 2x=6x$

ఉదా : 7 $y=e^{ax} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right)=e^{ax}\frac{d}{dx}(ax)=ae^{ax}$

ఉదా : 8 $y=5^x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(5^x\right)=5^x \log_e 5$

ఉదా : 9 $y=7^{mx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(7^{mx}\right)=7^{mx}\log_e 7\frac{d}{dx}(mx)$

ఉదా : 10 $y=5x+x^3$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(5x)+\frac{d}{dx}x^3=5\frac{d}{dx}(x)+3x^2$$

$$=5+3x^2$$

ఉదా : 11 $y=7x^2-5x^5$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(7x^2\right)-\frac{d}{dx}\left(5x^5\right)=7\frac{d}{dx}\left(x^2\right)-5\frac{d}{dx}\left(x^5\right)$$

$$=7\times 2x-5\times 5x^4=14x-25x^4$$

ఉదా : 12 $y=8x^3-6x^2+\frac{12}{x^3}+9x^4-\frac{10}{x^5}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(8x^3-6x^2+\frac{12}{x^3}+9x^4-\frac{10}{x^5}\right)$$

$$=8\frac{d}{dx}\left(x^3\right)-6\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+12\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^3}\right)+9\frac{d}{dx}\left(x^4\right)-10\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^5}\right)$$

$$=8\times 3x^2-6\times 2x+12(-3)x^{-4}-9\times 4x^3-10\left(-5x^{-6}\right)$$

$$=24x^2-12x-36x^{-4}-36x^3+50x^{-6}$$

ఉదా : 13 $y=\frac{1}{x}+\sqrt{x}+e^x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{d}{dx}\sqrt{x}+\frac{d}{dx}\left(e^x\right)=\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)+\frac{d}{dx}x^{1/2}+\frac{d}{dx}e^x$$

$$=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+e^x=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+e^x$$

ఉదా : 14 $y=x^7+x^{3/2}+5+e^x+\log x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^7\right)+\frac{d}{dx}\left(x^{3/2}\right)+\frac{d}{dx}(5)+\frac{d}{dx}\left(e^x\right)+\frac{d}{dx}(\log x)$$

$$=7x^6+\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}+0+e^x+\frac{1}{x}$$

$$=7x^6+\frac{3}{2}\sqrt{x}+e^x+\frac{1}{x}$$

ఉదా : 15 $y=x^3 e^x$

$$\frac{dy}{dx}=e^x\frac{d}{dx}\left(x^3\right)+x^3\frac{d}{dx}\left(e^x\right)$$

$$=e^x 3x^2+x^3 e^x=3x^2 e^x+x^3 e^x$$

ఉదా : 16 $y=\left(2x^3+3\right)\left(3x^2+2x+9\right)$

$$\frac{dy}{dx}=\left(3x^2+2x+9\right)\frac{d}{dx}\left(2x^3+3\right)+\left(2x^3+3\right)\frac{d}{dx}\left(3x^2+2x+9\right)$$

$$=\left(3x^2+2x+9\right)\left(2\times 3x^2+0\right)+\left(2x^3+3\right)(3\times 2x+2+0)$$

$$=\left(2+3x^2\right)\left(3x^2+2x+9\right)+\left(2x^3+3\right)(6x+2)$$

ఉదా : 17 $y=e^x\log x$

$$\frac{dy}{dx}=\log x\frac{d}{dx}\left(e^x\right)+e^x\frac{d}{dx}(\log x)$$

$$=\log x.\, e^x+e^x.\frac{1}{x}$$

ఉదా : 18 $y=\log_a x\ =\dfrac{\log_e x}{\log_e a}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\log_e x}{\log_e a}\right) = \frac{1}{\log_e a}\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{\log_e a}\frac{1}{x}$$

ఉదా : 19 $y = e^x \log x\left(2x^2+3\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \log x\left(2x^2+3\right)\frac{d}{dx}\left(e^x\right) + e^x\left(2x^2+3\right)\frac{d}{dx}(\log x) + e^x \log x\frac{d}{dx}\left(2x^2+3\right)$$

$$= \log x\left(2x^2+3\right)e^x + e^x\left(2x^2+3\right).\frac{1}{x} + e^x \log x(4x)$$

ఉదా : 20 $y = \dfrac{x^3}{x^3+2} = \dfrac{u}{v}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(x^3+2\right)\frac{d}{dx}\left(x^3\right) - x^3\frac{d}{dx}\left(x^3+2\right)}{\left(x^3+2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(x^3+2\right)3x^2 - x^3\left(3x^2+0\right)}{\left(x^3+2\right)^2} = \frac{3x^2\left(x^3+2\right) - 3x^5}{\left(x^3+2\right)^2}$$

$$= \frac{3x^5+6x^2-3x^5}{\left(x^3+2\right)^2} = \frac{6x^2}{\left(x^3+2\right)^2}$$

ఉదా : 21 $y = \dfrac{3x+4}{e^x+2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(e^x+2\right)\frac{d}{dx}(3x+4) - (3x+4)\frac{d}{dx}\left(e^x+2\right)}{\left(e^x+2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(e^{x}+2\right)(3+0)-(3x+4)\left(e^{x}+0\right)}{\left(e^{x}+2\right)^{2}}$$

$$=\frac{3\left(e^{x}+2\right)-e^{x}(3x+4)}{\left(e^{x}+2\right)^{2}}$$

ఉదా : 22 $y=\frac{(x+2)(3x-2)}{x-4}=\frac{3x^{2}+4x-4}{x-4}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-4)\frac{d}{dx}\left(3x^{2}+4x-4\right)-\left(3x^{2}+4x-4\right)\frac{d}{dx}(x-4)}{(x-4)^{2}}$$

$$=\frac{(x-4)(6x+4)-\left(3x^{2}+4x-4\right)(1)}{(x-4)^{2}}$$

$$=\frac{(x-4)(6x+4)-\left(3x^{2}+4x-4\right)}{(x-4)^{2}}$$

ఉదా : 23 $y=\frac{x^{1/2}+2}{x^{1/2}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^{1/2}\frac{d}{dx}\left(x^{1/2}+2\right)-\left(x^{1/2}+2\right)\frac{d}{dx}x^{1/2}}{\left(x^{1/2}\right)^{2}}$$

$$=\frac{x^{1/2}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+0\right)-\left(x^{\frac{1}{2}}+2\right)\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}-2\times\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{x}$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}}{x}$$

ఉదా : 24 $y=\frac{x^2}{e^x}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x\frac{d}{dx}\left(x^2\right)-x^2\frac{d}{dx}\left(e^x\right)}{\left(e^x\right)^2}$$

$$=\frac{2xe^x-e^x x^2}{\left(e^x\right)^2}=\frac{e^x\left(2x-x^2\right)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{2x-x^2}{e^x}$$

ఉదా : 25 $y=10^x x^{16}$

$$\frac{dy}{dx}=x^{16}\frac{d}{dx}\left(10^x\right)+10^x\frac{d}{dx}\left(x^{16}\right)$$

$$=x^{16}10^x\log_e 10+10^x 16x^{15}$$

$$=10^x x^{15}\left(16+x\right)$$

14.3.4 సంయుక్త ప్రమేయము యొక్క వ్యుత్పన్నము :

x వద్ద g అవకలనీయమై, $g(x)$ వద్ద f అవకలనీయమైనపుడు f వద్ద (fog) అనే సంయుక్త ప్రమేయము అవకలనీయము మరియు

$$(fog)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(fog)(x+h)-(fog)(x)}{h}$$

$y = f(u),\ u = g(x)$ అయితే

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{dy}{dx}$ అవుతుంది. దీనిని గొలుసు నియమము (chain rule) అంటారు.

14.3.5 అంతర్లీన ప్రమేయపు వ్యుత్పన్నము (Implicit Differentiation) :

x, y లలో ఒక అంతర్లీన ప్రమేయమున్న $y = \phi(x)$ గా వ్రాయకుండానే ఆ ప్రమేయం యొక్క వ్యుత్పన్నము కనుగొనవచ్చును. ϕ' కనుక్కునే పద్ధతినే అంతర్లీన అవకలనము అని అంటాము.

14.3.6 అధిక పరిమాణ వ్యుత్పన్నము :

f అనునది x యొక్క అవకలనీయ ప్రమేయమైనపుడు ఆ ప్రమేయము యొక్క అవకలజము f' కూడా x యొక్క అవకలనీయ ప్రమేయము. f' యొక్క అవకలజమును f యొక్క రెండవ అవకలజము అని అంటాము. దీనిని f''తో సూచిస్తాము.

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

ఇదే విధంగా f యొక్క 3వ, 4వ, ... nవ అవకలజములను కనుగొనవచ్చును. అయితే $y = f(x)$ యొక్క 1వ, 2వ,.... nవ అవకలజములను వరుసగా $f', f'', \ldots\ldots f^n$ లేదా $Dy, D^2y, D^3y, \ldots., D^ny$తో సూచిస్తాము.

14.3.7 ఉదాహరణలు :

ఉదా : 1 $y = (3x+2)^4$

జవాబు : $u = 3x + 2,\ y = u^4$ అనుకొనుము.

$$\frac{du}{dx} = 3 + 0,\ \frac{dy}{du} = 4u^3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 4u^3 \times 3 = 12(3x+2)^3$$

ఉదా : 2 $y = e^{ax}$

జవాబు : $u = ax \quad y = e^u$ అనుకొనుము.

$$\frac{du}{dx}=a,\ \frac{dy}{du}=e^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=e^4\,a=a\,e^{ax}$$

ఉదా : 3 $y=\log\left(\frac{x+5}{3x+8}\right)$

జవాబు : $u=\frac{x+5}{3x+8},\ y=\log u$ అనుకొనుము.

$$\frac{du}{dx}=\frac{(3x+8)\frac{d}{dx}(x+5)-(x+5)\frac{d}{dx}(3x+8)}{(3x+8)^2}$$

$$=\frac{(3x+8)1-(x+5)^3}{(3x+8)^2}=\frac{3x+8-3x-15}{(3x+8)^2}=\frac{-7}{(3x+8)^2}$$

$$\frac{dy}{du}=\frac{d}{du}(\log u)=\frac{1}{u}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\times\frac{(-7)}{(3x+8)^2}=\frac{-7}{(3x+8)^2\left(\frac{x+5}{3x+8}\right)}$$

ఉదా : 4 $y=\frac{1}{\sqrt{5x^3-9x^2+7}}$

జవాబు : $u=5x^3-9x^2+7,\ y=\frac{1}{\sqrt{u}}$ అనుకొనుము.

$$\frac{du}{dx}=15x^2-18x\quad \frac{dy}{du}=\frac{d}{du}\left(u^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2}u^{-1/2-1}=-\frac{1}{24^{3/2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=-\frac{1}{24^{3/2}}\left(15x^2-18x\right)=\frac{18x-15x^2}{2\left(5x^3-9x^2+7\right)^{3/2}}$$

ఉదా : 5 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2+b^2}}{\left(\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2+b^2}\right)\left(\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2+b^2}\right)}$

జవాబు : $y=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2+b^2}}{x^2+a^2-x^2-b^2}=\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2+b^2}}{a^2-b^2}$

$t=\sqrt{x^2+a^2}$ అనుకొనుము.

$u=x^2+a^2,\ t=\sqrt{u}$ అనుకొనుము.

$$\frac{du}{dx}=2x,\ \frac{dt}{du}=\frac{d}{du}\left(\sqrt{u}\right)=\frac{1}{2}u^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$\frac{dt}{dx}=\frac{dt}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\times 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\therefore\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\ \&\ \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+b^2}\right)=\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+a^2}\right)-\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+b^2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+b^2}}\right)$$

ఉదా : 6 $y=\sqrt{x^2+1}$

జవాబు : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}-1}\dfrac{d}{dx}\left(x^2+1\right)$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

ఉదా : 7 $y=\log\sqrt{3x+5}$

జవాబు : $\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\log\sqrt{3x+5}\right)=\frac{1}{\sqrt{3x+5}}\frac{d}{dx}\sqrt{3x+5}$

$$=\frac{1}{\sqrt{3x+5}}\ \frac{1}{2\sqrt{3x+5}}\ \frac{d}{dx}(3x+5)=\frac{3}{2(3x+5)}$$

ఉదా : 8 $y=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3$

జవాబు : $u=x+\frac{1}{x},\ y=u^3$ అనుకొనుము.

$$\frac{du}{dx}=1+\left(-\frac{1}{x^2}\right),\ \frac{dy}{du}=3u^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx} = 3u^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$$

ఉదా : 9 $x^2-y^2+3x=4y$ అంతర్లీన ప్రమేయమునకు $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

జవాబు : $x^2-y^2+3x=4y$

రెండు వైపులా x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{d}{dx}\left(x^2-y^2+3x\right) = \frac{d}{dx}(4y)$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right)-\frac{d}{dx}\left(y^2\right)+\frac{d}{dx}(3x)=4\frac{dy}{dx}$$

$$2x-2y\frac{dy}{dx}+3 = 4\frac{dy}{dx}$$

$$2x+3=(2y+4)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+3}{2y+4}$$

ఉదా : 10 $x^3+y^3-y^2+xy=3$ అంతర్లీన ప్రమేయమునకు $\frac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

జవాబు : $x^3+y^3-y^2+xy=3$

రెండు వైపులా x దృష్ట్యా అవకలనము చేయగా

$$\frac{d}{dx}\left(x^3+y^3-y^2+xy\right)=\frac{d}{dx}(3)$$

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-2y\frac{dy}{dx}+y\frac{d}{dx}(x)+x\frac{d}{dx}(y)=0$$

$$3x^2+\left(3y^2-2y\right)\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0$$

$$\left(3y^2-2y+x\right)\frac{dy}{dx}=-\left(3x^2+y\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-\left(3x^2+y\right)}{3y^2-2y+x}$$

ఉదా : 11 $y=3x^3-9x$ కు x దృష్ట్యా **2**వ, **3**వ అవకలజములను కనుగొనుము.

జవాబు : $y=3x^3-9x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(3x^3-9x\right)=9x^2-9$$

2వ పరిమాణ అవకలనము

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(9x^2-9\right)=18x-0=18x$$

3వ పరిమాణ అవకలనము

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{d^2x}\right)=\frac{d}{dx}(18x)=18$$

14.3.8 అభ్యాసము :

I x దృష్ట్యా ఈ క్రింది ప్రమేయములను అవకలనము చేయుము.

1. $2x^3+3x^2-6x+4$ 2. $e^{5x}+x$ 3. $x^4+4^x+\log x$

4. $\dfrac{x^5+x^2+x}{x^2}$ 5. $\left(x^2+1\right)\left(3x^2-2x^3\right)$ 6. $\left(2x^3+3\right)\left(3x^2+2x+9\right)$

7. $\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)\left(5\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}\right)$ 8. $\left(2x^2+5\log x\right)\left(3x^4+7x^3\right)$

II ఈ క్రింది ప్రమేయాలకు x దృష్ట్యా వ్యుత్పన్నములను కనుగొనుము.

1. $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 2. $y=\dfrac{3+5\log x}{x^2+3}$ 3. $x^2\log x$

4. $4^x x^4$ 5. $\dfrac{5-4x}{5+4x}$ 6. $\dfrac{\log x}{x^3}$

III ఈ క్రింది సంయుక్త ప్రమేయాలకు వ్యుత్పన్నములను కనుగొనుము.

1. $\left(3+2x^2\right)^5$ 2. e^{x^2+3x+9} 3. $\log(3x+9)$

4. $y=\log f(x)$ 5. $y=\left(x^3+3\right)e^{5x+2}$ 6. $\left(3x^2-8x+9\right)^2$

7. $\dfrac{1}{\sqrt{5-2x}}$ 8. $\log\left[(5-2x)(5+3x)\right]$

IV ఈ క్రింది అంతర్లీన ప్రమేయాలకు $\dfrac{dy}{dx}$ కనుగొనుము.

1. $x^2+xy^2-y=5$ 2. $x^3-xy^2+3y^2+2=0$

14.4 గరిష్ట కనిష్ట విలువలు (Maxima and Minima) :

14.4.1 ఆరోహణ, అవరోహణ ప్రమేయాలు : $f(x)$ అనే ప్రమేయము A లో నిర్వచింపబడినది అనుకోండి.

(i) ప్రతి $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ అయితే, f ప్రమేయము Aలో ఆరోహణ ప్రమేయము అని అంటారు.

(ii) ప్రతి $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ అయితే, f ప్రమేయము Aలో శుద్ధ ఆరోహణ ప్రమేయము అని అంటారు.

(iii) ప్రతి $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ అయితే, f ప్రమేయము A లో అవరోహణ ప్రమేయము అని అంటారు.

(iv) ప్రతి $x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ అయితే, f ప్రమేయము A లో శుద్ధ అవరోహణ ప్రమేయము అని అంటారు.

14.4.2 గరిష్ట మరియు కనిష్ట విలువలు :

(i) $f(x)$ అనే ప్రమేయము ఒక బిందువు వద్ద ఆరోహణ ఆగి మరియు అవరోహణ మొదలయితే ఆ బిందువు వద్ద $f(x)$ ప్రమేయము గరిష్ఠము అంటారు. a ఒక బిందువు మరియు a లో అతిచిన్న మార్పు h అయితే

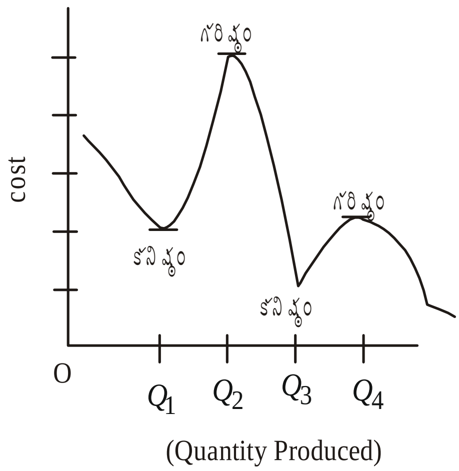
$f(a) \ge f(a+h)$ గా సూచిస్తాము.

(ii) $f(x)$ అనే ప్రమేయము ఒక బిందువు వద్ద అవరోహణ ఆగి మరియు ఆరోహణ మొదలయితే ఆ బిందువు వద్ద $f(x)$ ప్రమేయము కనిష్ఠము అంటారు.

a ఒక బిందువు మరియు aలో అతి చిన్న మార్పు h అయితే

$f(a) \le f(a+h)$ గా సూచిస్తాము.

14.4.3 **(Cost Function)**యొక్క గ్రాఫ్

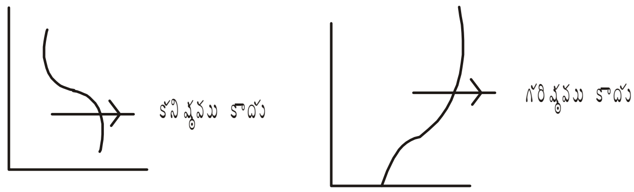


14.4.4 గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ ప్రమేయాల లక్షణములు :

(i) ఒక ప్రమేయము యొక్క గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువలు ఎప్పుడూ ఒకదాని తరువాత ఒకటి వచ్చును.

(ii) గరిష్ఠ బిందువులు శిఖరాగ్రములుగాను, గరిష్ఠ విలువలు లోయలో దిగువ బిందువులుగాను కనిపిస్తాయి.

(iii)



(iv) ఒక ప్రమేయమునకు గరిష్ఠ విలువ వచ్చే బిందువు వద్ద $\frac{dy}{dx}=0$, మరియు $\frac{d^2y}{dx^2}<0$

ఒక బిందువు a మరియు $f(x)$ ప్రమేయము, $f'(a)=0$ మరియు $f''(a)<0$ అయితే a వద్ద f కు గరిష్ఠము వుంటుంది.

ఒక ప్రమేయమునకు కనిష్ఠ విలువ వచ్చే బిందువు వద్ద $\frac{dy}{dx}=0$ మరియు $\frac{d^2y}{dx^2}>0$.

ఒక బిందువు a మరియు $f(x)$ ప్రమేయము, $f'(a)=0$ మరియు $f''(a)>0$ అయితే a వద్ద f కు కనిష్ఠము ఉంటుంది.

(v) $f'(a)=0$ అయితే f అనే ప్రమేయము a వద్ద విరామము కలిగి ఉందని మరియు $f(a)$ను a వద్ద విరామ విలువ (Stationary value) అని అంటాము. $(a. f(a))$ను f యొక్క విరామ బిందువు (Stationary point) అని అంటాము.

(vi) $f(x)$ అనే ప్రమేయము (x, y) అంతరములో అవరోహణ చెందితే, $\frac{dy}{dx}<0$. $f(x)$ అనే ప్రమేయము (x, y) అంతరములో ఆరోహణ చెందితే, $\frac{dy}{dx}>0$.

14.4.5 ఉదాహరణలు :

ఉదా : 1 ఈ క్రింది ప్రమేయాలు ఇచ్చిన బిందువుల వద్ద ఆరోహణ లేక అవరోహణ లేక విరామము కలిగి వుంటుందో తెలుపుము.

(i). $y=1+2x-x^2$, $x=1$ మరియు $x=2$

$y=1+2x-x^2$

$\frac{dy}{dx}=0+2-2x$,

$x=1$, $\frac{dy}{dx}= 2-2=0$ $\quad \therefore x=1$ వద్ద $f(x)$ విరామము కలిగి వుంటుంది.

$x=2$, $\frac{dy}{dx}= 2-2\times 2=-2<0$ $\quad \therefore x=2$ వద్ద $f(x)$ అవరోహణ చెందుతుంది.

(ii). $y=3x^4+16x^3+18x^2+20$, $x=3$ మరియు $x=-4$

$y=3x^4+16x^3+18x^2+20$

$\frac{dy}{dx}=3\times 4x^3+16\times 3x^2+18\times 2x+0$

$=12x^3+48x^2+16x$

$x=3$, $\frac{dy}{dx}=12\times 3^3+48\times 3^2+16\times 3=864>0$

$\therefore x=3$ వద్ద $f(x)$ ఆరోహణ చెందుతుంది.

$x = -4,\ \dfrac{dy}{dx} = 12(-4)^3 + 48(-4)^2 + 16(-4) = -768 + 768 - 144 = -144 < 0$

$\therefore x = -4$ వద్ద $f(x)$ అవరోహణ చెందుతుంది.

(iii) $y = x^3 - 2x^2 + 20,\ x = 1$ మరియు $x = 4$

$$y = x^3 - 2x^2 + 20$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 0$$

$$x = 1, \frac{dy}{dx} = 3\times1 - 4\times1 = -1 < 0$$

$x = 1$ వద్ద $f(x)$ అవరోహణ చెందుతుంది.

$x = 4,\ \dfrac{dy}{dx} = 3(4)^2 - 4(4) = 48 - 16 = 32 > 0$

$x=4$ వద్ద $f(x)$ ఆరోహణ చెందుతుంది.

$\dfrac{dy}{dx} = 0$ అయినపుడు y విరామం కలిగి వుంటుంది.

$$3x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(3x - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ లేదా } x = \frac{4}{3}$$

$\therefore x = 0,\ x = \dfrac{4}{3}$ వద్ద $f(x)$ విరామము కలిగి వుంటుంది.

ఉదా : 2 $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$ ప్రమేయమునకు గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువలు కనుగొనుము.

జవాబు : $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 36$$

$\frac{dy}{dx}=0$ అయినపుడు ప్రమేయమునకు అంత్య విలువలు వుంటాయి.

$6x^2+6x-36=0 \Rightarrow x^2+x-6=0$

$\Rightarrow (x+3)(x-2)=0 \quad \therefore x=-3 \; or \, 2$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=12x+6$$

$x=-3, \frac{d^2y}{dx}=12(-3)+6=-30<0$

$x=-3$ వద్ద ప్రమేయమునకు గరిష్ఠ విలువ వుంటుంది.

y గరిష్టము $=f(-3)=2(-3)^3+3(-3)^2-36(-3)+10$

$= -54+27+108+10=91$

$x=2, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=12(2)+6=30>0$

$x=2$ వద్ద ప్రమేయమునకు కనిష్ఠ విలువ వుంటుంది.

y కనిష్ఠము = $f(2)=2(2)^3+3(2)^2-36(2)+10$

$=2(8)+3(4)-72+10=16+12-72+10=-34$

ఉదా : 3 x^3-2x^2+x+6 యొక్క గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువలు కనుగొనుము.

జవాబు : $y=f(x)=x^3-2x^2+x+6$ అనుకొనుము.

$\frac{dy}{dx}=f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$

$\frac{dy}{dx}=0$ అయితే ప్రమేయమునకు అంత్య విలువలు వుంటాయి.

$3x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$ లేక 1

$$\frac{d^2y}{dx^2}=6x-4$$

$$x=\frac{1}{3},\frac{d^2y}{dx^2}=6\times\frac{1}{3}-4 = 2-4=-2<0$$

$\therefore x=\frac{1}{3}$ వద్ద ప్రమేయమునకు గరిష్ఠ విలువ వుంటుంది.

y గరిష్ఠము = $\left(\frac{1}{3}\right)^3-2\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+6=\frac{1-6+9+162}{27}=\frac{166}{27}$

$x=1,\ \frac{d^2y}{dx^2}=6\times1-4 = 2>0$

$\therefore x=1$ వద్ద ప్రమేయమునకు కనిష్ఠము విలువ వుంటుంది.

y అల్పిష్ఠము = $1^3-2(1)^2+1+6 = 1-2+1+6=6$

ఉదా : 4 ఒక సంస్థలోని స్టాకు నియంత్రణ (Inventory control)కు మొత్తము వ్యయ ప్రమేయము $T=10,000 + \frac{2,50,000}{Q}+\frac{Q}{16}$, $T\rightarrow$ మొత్తము వ్యయము $Q\rightarrow$ ఒక్కొక్కసారి ఆర్డరు చేసే పరిమాణము, $10,000\rightarrow$ కొనుగోలు ధర, $\frac{2,50,000}{Q}\rightarrow$ ఆర్డరుకయ్యే వ్యయము, $\frac{Q}{16}\rightarrow$ స్టాకు రవాణా వ్యయము, పై వివరముల నుంచి (1) EOQ ఆదా పూర్వక ఆర్డరు పరిమాణము (2) EOQ కు సంబంధించిన వ్యయము, (3) 2500 యూనిట్లకు ఒక్కొక్క ఆర్డరు ఇచ్చేటప్పుడు అయ్యే స్టాకు మొత్తము వ్యయము పై వివరముల నుంచి కనుగొనుము.

జవాబు : ఇచ్చిన ప్రమేయము, $T=10,000+\frac{2,50,000}{Q}+\frac{Q}{16}$

Q దృష్ట్యా T ని అవకలనము చేయగా

$$\frac{dT}{dQ}=0+2,50,000(-1)Q^{-2}+\frac{1}{16}$$

$$=\frac{-2,50,000}{Q^2}+\frac{1}{16}$$

అంత్య విలువల వద్ద $\frac{dT}{dQ}=0$

$$\frac{-2,50,000}{Q^2}+\frac{1}{16}=0$$

$$\frac{2,50,000}{Q^2}=\frac{1}{16}\Rightarrow Q^2=2,50,000\times 16$$

$$Q=500\times 4=2000$$

$$\frac{d^2T}{dQ^2}=\frac{d}{dQ}\left(-2,50,000\,Q^{-2}+\frac{1}{16}\right)$$

$$=2\left(2,50,000\right)Q^{-3}+0=\frac{5,00,000}{Q^3}$$

$Q=2000$ వద్ద $\frac{d^2T}{dQ^2}=\frac{5,00,000}{\left(2000\right)^3}=\frac{5,\cancel{00},\cancel{000}}{2000\times 2\cancel{000}\times 2\cancel{000}}$

$$=\frac{5}{80,000}>0$$

(1) EOQ: పై విషయము నుండి $Q=2000$ అయినపుడు వ్యయ ప్రమేయమునకు గరిష్ఠ కనిష్ఠ విలువల ఉండును. $ECQ=$ **200** యూనిట్లు.

(2) EOQ కు సంబంధించిన వ్యయము : ఇచ్చిన ప్రమేయములో Q కు బదులు 2000 ప్రతిక్షేపించిన కనిష్ఠ వ్యయము లేదా EOQకు సంబంధించిన వ్యయము వచ్చును.

T కనిష్టము = $10,000+\frac{2,50,000}{2,000}+\frac{2,000}{16}$

$$=10,000+125+125=\text{ రూ. }10,250$$

(3) $Q=2,500$ యూనిట్లు అయినపుడు స్టాకు వ్యయము : మొత్తము వ్యయ ప్రమేయములో Qను 2500తో పూరిస్తే

$$T=10,000+\frac{2,50,000}{2,500}+\frac{2,500}{16}$$

$$=10,000+100+156.25=\text{ రూ. }10,256.25$$

ఉదా 5 : ఒక సంస్థ యొక్క పెట్టుబడి మరియు ఆదాయ ప్రమేయములు వరుసగా

$C=100+0.015x^2, R=3x$ అయితే,

$C=$ మొత్తం పెట్టుబడిని, $R=$ మొత్తం ఆదాయాన్ని, $x=$ ఉత్పత్తి చేసిన వస్తువుల సంఖ్యను సూచిస్తే, సంస్థ అత్యధిక లాభాలను సాధించాలంటే ఎంత ఉత్పత్తిని చేరుకోవాలి.

సాధన : లాభం = P = ఆదాయం - పెట్టుబడి = $R-C$

$$i.e., P=R-C$$

$$P=3x-100-0.015x^2$$

$$\frac{dP}{dx}=\frac{d}{dx}\left(3x-100-0.015x^2\right)=3-0.015(2x) =3-0.030x$$

P యొక్క గరిష్ఠ విలువకు $\frac{dP}{dr}=0$ కావలెను.

$$i.e., 3-0.03x=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{3}{0.03}=100$$

$\frac{d^2P}{dx^2}=-0.03<0$ $\therefore 100$ యూనిట్లు ఉత్పత్తి చేస్తే అత్యధిక లాభాలను పొందవచ్చును.

ఉదా 6 : y యూనిట్ ధరకు, x కావలసిన వస్తువుల సంఖ్య అయి, డిమాండు ప్రమేయం $y=15e^{-x/3}$ అయితే అత్యధిక ఆదాయము రావాలంటే x, y లు ఎంత ఉండాలో కనుగొనుము.

సాధన : ఆదాయాన్ని R తో సూచిస్తే

$R=xy$ అవుతుంది.

$$y=15e^{-x/3}$$

$$i.e., R=x.\ 15e^{-x/3}$$

ఆదాయం గరిష్ఠం అంటే $\frac{dR}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x.15e^{-x/3}\right)=0$

$$=15e^{-x/3}\frac{d}{dx}(x)+x\frac{d}{dx}\left(15e^{-x/3}\right)$$

$$=15e^{-x/3}+15x\frac{d}{dx}\left(e^{-x/3}\right)$$

$$=15e^{-x/3}+15e^{-x/3}x\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$=15e^{-x/3}\left(1-\frac{x}{3}\right)$$

$$1-\frac{x}{3}=0\Rightarrow x=3.$$

అదే విధంగా $$\frac{d^2R}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[15e^{-x/3}\left(1-\frac{x}{3}\right)\right]$$

$$=\frac{d}{dx}15e^{-x/3}-\frac{d}{dx}5xe^{-x/3}$$

$$=15e^{-x/3}\left(-\frac{1}{3}\right)-5\left[xe^{-x/3}\left(-\frac{1}{3}\right)+e^{-x/3}.1\right]$$

$$=-5e^{-\frac{x}{3}}-5e^{-\frac{x}{3}}\left[1-\frac{x}{3}\right]$$

$$=-5e^{-\frac{x}{3}}\left[1+1-\frac{x}{3}\right]=(-5)e^{-\frac{x}{3}}\left(2-\frac{x}{3}\right)$$

$x=3$ అని ప్రతిక్షేపించగా $$\frac{d^2R}{dx^2}-5e^{-1}1<0$$

$\therefore x=3$ అయినపుడు R గరిష్ఠం అవుతుంది.

అభ్యాసాలు :

1. ఈ క్రింది ప్రమేయాలు ఇచ్చిన బిందువుల వద్ద ఆరోహణ లేదా అవరోహణ లేదా విరామము కలిగి వుంటుందో తెలుపుము.

   (ఎ) $y=10x^3-15x^2+10$, $x=2$ మరియు $x=3$

   (బి) $y=2x^2-5x+9$, $x=2$ మరియు $x=1$

2. గరిష్ఠ లేక కనిష్ఠ విలువల కొరకు $y=27-6x+x^2$ ప్రమేయమును పరీక్షించుము.

3. $y=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+8$ ప్రమేయమునకు గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువలు కనుగొనుము.

4. $y=x^3-3x+15$ ప్రమేయమునకు గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువలు కనుగొనుము.

5. ఒక సంస్థ యొక్క ఆదాయ మరియు వ్యయ ప్రమేయములను ఈ విధముగా ఇచ్చిరి.

   $c=100+0.015x^2$, $R=3x$

   $c \to$ మొత్తము వ్యయము, $R \to$ మొత్తము ఆదాయము, $x \to$ ఉత్పత్తి అయిన యూనిట్ల సంఖ్య. సంస్థ యొక్క లాభాలు గరిష్ఠమయ్యేటట్లుగా ఉత్పత్తి రేటు, x కనుగొనుము. $x=120$ ఉన్నపుడు లాభము కనుగొనుము.

6. ఒక వస్తువును తయారు చేయుటకు ధర క్రింది ప్రమేయాల ద్వారా సూచింపబడితే $C=10+\frac{80}{x}+5x^2$, C యొక్క కనిష్ఠ విలువను కనుగొనుము.

7. ఒక సంస్థ యొక్క అమ్మకపు, ఆదాయపు ప్రమేయాలు

   $C=100+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{50}\right)^2, R=2x$ అయితే

   (1) గరిష్ఠ లాభాలు (2) 7000 యూనిట్ల అమ్మకానికి వచ్చు లాభాలు కనుగొనుము.

రచయిత

శ్రీమతి ఎస్.వి.ఎస్. గిరిజ

పాఠం 15

సమాకలనం

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలను తెలుసుకోగలరు.

* ఇచ్చిన ప్రమేయమును సమాకలనము చేయుట, వివిద రంగాలలో వాటి అనువర్తనాలు అనే విషయములు మౌలిక స్థాయిలో (Basic Lend) నేర్చుకుందాము.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

15.1 ఉపోద్ఘాతం :

రెండు గాని అంతకన్నా ఎక్కువ అంకెలను కూడిక మనకందరకు తెలిసినదే. ఒక ప్రమేయానికి లెక్కించలేని అనంతమైన విలువలున్నపుడు (uncountable Infinite) ఏ విలువ తరువాత ఖచ్చితంగా ఏ విలువ వస్తుందో చెప్పలేనపుడు, ప్రతి రెండు విభిన్న విలువలకు మధ్య మరల అనంతమైన విలువలుంటే అటువంటి విలువలన్నింటిని కూడి వాటి మొత్తమును (aggregate)ను తేల్చిచెప్పడం సమాకలనము అనే ప్రక్రియ ద్వారా జరుగుతుంది. ఈ ప్రక్రియ నిర్వచనము కొన్ని ప్రమేయాల సమాకలన గుణకములు, వాటి అనువర్తనాలు మనము తెలుసుకుందాము.

15.2 నిర్వచనము :

సమాకలనము అనునది అవకలనము యొక్క వ్యతిరేక ప్రక్రియ.

$f^1 = g$ అయితే f అనే ప్రమేయాన్ని g అనే ప్రమేయము యొక్క ప్రత్యవకలజము అని అంటాము.

$F(x)$ అనే ప్రమేయము $f(x)$ అనే ప్రమేయము యొక్క ప్రత్యవకలజమైతే, $F(x)+C$ అనే ప్రమేయాన్ని $f(x)$ యొక్క అనిశ్చిత సమాకలని అని అంటాము. దీనిని $\int f(x)dx$ గా సూచిస్తాము.

$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

అనిశ్చిత సమాకలని ఒక ప్రమేయాల సమూహమును సూచిస్తుంది.

అనిశ్చిత సమాకలని ఒక వక్రాల సమూహాన్ని సూచిస్తుంది.

15.3 ప్రమేయాలకు అనిశ్చిత సమాకలనులు:

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

2. $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \log x + C$

3. $\int e^x\,dx = e^x + C$

4. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\log_e^a} + C$

5. $\int k\,dx = kx + C$

6. $\int k\;f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx + C$

7. $\int\left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$

8. $\int e^{kx}\,dx = \dfrac{1}{k}e^{kx} + C$

9. $\int a^{kx}\,dx = \dfrac{a^{kx}}{k\log_e^a} + C$

10. **ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి ద్వారా సమాకలనము:** స్వతంత్ర చరరాశి x స్థానంలో t, v, z మొదలగు చరరాశులను ప్రతిక్షేపించి సమాకలనము చేయవచ్చును.

15.4 ఉదాహరణలు:

ఉదా - 1: ఈ క్రింది ప్రమేయాలను సమాకలనము చేయుము.

(i) x^3 (ii) $x^{3/2}$ (iii) $\frac{1}{x^4}$ (iv) $x^{-\frac{2}{3}}$ (v) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

జవాబు: (i) $\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$

(ii) $\int x^{3/2}\, dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + C$

(iii) $\int \frac{1}{x^4}\, dx = \int x^{-4}\, dx = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = -\frac{1}{3} x^{-3} + C$

(iv) $\int x^{-\frac{2}{3}}\, dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = 3x^{1/3} + C$

(v) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2}\, dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = 2\sqrt{x} + C$

ఉదా - 2: x దృష్ట్యా ఈ క్రింది ప్రమేయములను సమాకలనము చేయుము.

(i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{5}{3}k$ (iii) $5x^3$ (iv) $\frac{7}{\sqrt{x}}$ (v) $\frac{4x^7 + 3x^3 - 5x^2}{x^4}$

(vi) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ (vii) $\left(x^2 - 2\right)^2$ (viii) $\sqrt{x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{\sqrt{x}}$ (ix) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$ (x) $\frac{x^2 - 3x + \sqrt[3]{x} + 7}{x}$

(xi) $\frac{ax + bx^{-3} + ex^{-7}}{kx^{-2}}$ (xii) $5^x + e^x + x^{-3/2}$ (xiii) $e^{3x} - 7x^{-1}$

(xiv) $10^{2x} + e^{-0.5x} + \frac{1}{x^3} + e^5$ (xv) 5×3^x

జవాబు: (i) $\int \frac{4}{5}\, dx = \frac{4}{5} x + C$

(ii) $\int \frac{5}{3} k\, dx = \frac{5}{3} k \int dx = \frac{5}{3} kx + C$

(iii) $\int 5x^3 dx = 5\frac{x^{3+1}}{3+1} = C = \frac{5}{4}\, x^4 + C$

(iv) $\int \frac{7}{\sqrt{x}}\, dx = 7\ x\ 2\sqrt{x} + C = 14\sqrt{x} + C$

(v) $\int \frac{4x^7 + 3x^3 - 5x^2}{x^4}\, dx = \int \left(4x^3 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^2} \right) dx$

$= \int 4x^3\, dx + \int \frac{3}{x} dx - \int \frac{5}{x^2} dx$

$= 4 \times \frac{x^4}{4} + 3 \log x - 5\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = x^4 + 3 \log\ x + \frac{5}{x} + C$

(vi) $\int \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx = \int \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \right) dx = \int x^2 dx + \int \frac{1}{x^2}\, dx + \int 2dx$

$= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x} + 2x + C$

(vii) $\int \left(x^2 - 2 \right)^2 dx = \int \left(x^4 + 4 - 4x^2 \right) dx = \int x^4\, dx + \int 4dx - \int 4x^2\, dx$

$= \frac{x^5}{5} + 4x - \frac{4x^3}{3} + C$

(viii) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} x + \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx = \int \sqrt{x}\, dx - \int \frac{1}{2} x\, dx + \int \frac{2}{\sqrt{x}}\, dx$

$= \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{2} \times \frac{x^2}{2} + 2 \times 2\sqrt{x} + C$

$$= \frac{2}{3} x^{3/2} - \frac{1}{4} x^2 + 4\sqrt{x} + C$$

(ix) $$\int \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 dx = \int \left(x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x^2 \times \frac{1}{x} + 3x \times \frac{1}{x^2}\right) dx$$

$$= \int x^3 dx - \int \frac{1}{x^3} dx - \int 3x dx + \int \frac{3}{x} dx$$

$$= \frac{x^4}{4} + \frac{1}{2x^2} - \frac{3x^2}{2} + 3\log x + C$$

(x) $$\int \frac{x^2 - 3x + \sqrt[3]{x} + 7}{x} dx = \int \left(x - 3 + x^{\frac{1}{3} - 1} + \frac{7}{x}\right) dx$$

$$= \int x\, dx - \int 3dx + \int x^{-\frac{2}{3}} dx + \int \frac{7}{x} dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + 7 \log x + C$$

$$= \frac{x^2}{2} - 3x + 3x^{1/3} + 7 \log x + C$$

(xi) $$\int \frac{ax + bx^{-3} + cx^{-7}}{k\, x^{-2}} dx = \int \frac{a}{k} x^3 dx + \int \frac{b}{k} x^{-1} dx + \int \frac{c}{k} x^{-5} dx$$

$$= \frac{a}{k} \frac{x^4}{4} + \frac{b}{k} \log x + \frac{c}{k} \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C$$

$$= \frac{a}{k} \frac{x^4}{4} + \frac{b}{k} \log x - \frac{k}{4k} \cdot \frac{1}{x^4} + C$$

(xii) $$\int \left(5^x + e^x + x^{-3/2}\right) dx = \int 5^x dx + \int e^x dx + \int x^{-3/2} dx$$

$$= \frac{5^x}{\log_e^5} + e^x + \frac{x^{\frac{-3}{2}+1}}{\frac{-3}{2}+1} + c = \frac{5^x}{\log_e^5} + e^x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

(xiii) $\int\left(e^{3x} - 7x^{-1}\right)dx = \int e^{3x}\,dx - \int \frac{7}{x}dx = \frac{e^{3x}}{3} - 7\log x + c$

(xiv) $\int\left(10^{2x} + e^{-0.5x} + \frac{1}{x^3} + e^5\right)dx$

$$= \int 10^{2x}\,dx + \int e^{-0.5x}\,dx + \int \frac{1}{x^3}dx + \int e^5 dx$$

$$= \frac{10^{2x}}{\log 10^2} + \frac{e^{-0.5x}}{-0.5} - \frac{1}{2}x^{-2} + e^5 \cdot x + C$$

$$= \frac{10^{2x}}{2} - \frac{e^{-0.5x}}{0.5} - \frac{1}{2x^2} + e^5 \times x + C$$

(xv) $\int 5 \times 3^x\,dx = 5\int 3^x\,dx = 5 \times \frac{3^x}{\log_e^3} + C$

ఉదా - 3: ప్రతిక్షేపణ పద్ధతుల ద్వారా ఈ క్రింది ప్రమేయములను సమాకలనము చేయుము.

(i) $x\left(x^2+5\right)^3$ (ii) $\left(x^3+5\right)^2 \cdot 3x^2$ (iii) $\frac{8x^2}{\left(x^3+5\right)^3}$

(iv) $(ax+b)^n$ (v) a^{mx}

జవాబు: (i) $\int x\left(x^2+5\right)^3 dx$

$x^2 + 5 = t$ అనుకొనుము

ఇరువైపులా అవకలనము చేయగా

$$(2x+0)dx = dt \Rightarrow 2x\,dx = dt \Rightarrow x\,dx = \frac{dt}{2}$$

$$\therefore \int x\left(x^2+5\right)^3 dx = \int t^3 \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{t^4}{4} + C = \frac{\left(x^2+5\right)^4}{8} + C$$

(ii) $\int \left(x^3+5\right)^2 \cdot 3x^2\, dx$

$x^3+5=t$ అనుకొనుము

ఇరువైపులా అవకలనము చేయగా

$3x^2\, dx = dt$

$$\therefore \int \left(x^3+5\right)^2 \cdot 3x^2\, dx = \int t^2\, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\left(x^3+5\right)^3}{3} + C$$

(iii) $\int \frac{8x^2}{\left(x^3+5\right)^3} dx$

$x^3+5=t$ అనుకొనుము

$3x^2\, dx = dt \Rightarrow x^2\, dx = \frac{dt}{3}$

$$\int \frac{8x^2}{\left(x^3+5\right)^3} dx = \int \frac{8\, x\, \frac{dt}{3}}{t^3} = \frac{8}{3}\int t^{-3}\, dt = \frac{8}{3}\frac{t^{-2}}{-2} + C$$

$$= -\frac{4}{3} \times \frac{1}{\left(x^3+5\right)^2} + C$$

(iv) $\int \left(ax+b\right)^n dx$

$ax+b=t$ అనుకొనుము

$adx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{a}$

$$\int (ax+b)^n\ dx = \int t^n\ \frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\frac{t^{n+1}}{n+1} + C = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

(v) $\int a^{mx}\ dx$

$mx = t$ అనుకొనుము

$$mdx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{m}$$

$$\int a^{mx}\ dx = \int a^t\ \frac{dt}{m} = \frac{1}{m}\int a^t\ dt = \frac{1}{m}\frac{a^t}{\log_e^a} + C$$

$$= \frac{1}{m}\frac{a^{mx}}{\log_e^a} + C$$

సమాకలనము యొక్క ప్రామాణిక రూపాలు:

1. $\int (ax+b)^n\ dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

2. $\int (ax+b)^n\ dx = \frac{1}{a}\log(ax+b) + c$

3. $x\int a^{mx}\ dx = \frac{a^{mx}}{m\log_e^a} + C$

4. $\int e^{mx}\ dx = \frac{e^{mx}}{m} + C$

5. $\int \frac{f^1(x)}{f(x)}\ dx = \log_e\ f(x) + C$

6. $\int \frac{f^1(x)}{\sqrt{f(x)}}\ dx = 2\sqrt{f(x)} + C$

7. $\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \log_e \left(\frac{x-a}{x+a} \right) + C, \; x > a$

8. $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \log_e \left(\frac{a+x}{a-x} \right) + C, \; x < a$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \log \left\{ \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right\} + C$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \log \left\{ \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right\} + C$

11. $\int \log x \, dx = x \log x - x + C$

12. $\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C$

13. $\int x e^{mx} \, dx = \frac{e^{mx}}{m} \left(x - \frac{1}{m} \right) + C$

14. $\int x^n \log x \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\log x - \frac{1}{n+1} \right) + C$

విభాగ సమాకలనము (Integration by Parts) :

$$\int f(x) \cdot g(x) \, dx = f(x) \int g(x) \, dx - \int \left[f^1(x) \cdot \int g(x) \, dx \right] dx$$

పాక్షిక భిన్నాల ద్వారా సమాకలనము: ఇచ్చిన ప్రమేయాన్ని పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టి సమాకలనము చేయుట.

నిశ్చిత సమాకలనము: ఒక స్వతంత్ర చలరాశి x కు సూచించిన విలువలు a, b ల వద్ద f(x) ప్రమేయము యొక్క సమాకలని విలువల తేడాను (a, b) అంతరములో f(x) యొక్క నిశ్చిత సమాకలని అంటారు.

$$\int_a^b f(x) \, dx = g(b) - g(a)$$

ఉదా: 1. $\int \log x\, dx = \int 1 \cdot \log x\, dx$

$$= \log x \int 1\, dx - \int \left(\frac{d}{dx} \log x \times x\right) dx = x \log x - \int \frac{1}{x} \times x\ dx$$

$$= x \log x - \int 1 dx = x \log x - x + C$$

2. $\int x \log x\, dx = \log x \int x\, dx - \int \left(\frac{d}{dx} \log x \times \frac{x^2}{2}\right) dx$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C$$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C$$

3. $\int x e^{mx} dx = x \int e^{mx}\, dx - \int \left(\frac{d}{dx} x \cdot \frac{e^{mx}}{m}\right) dx$

$$= \frac{xe^{mx}}{m} - \int \frac{e^{mx}}{m} dx = \frac{xe^{mx}}{m} - \frac{e^{mx}}{m^2} + C$$

4. $\int x^2 e^{3x}\, dx = x^2 \int e^{3x}\, dx - \int \left(\frac{d}{dx} x^2\, \frac{e^{3x}}{3}\right) dx$

$$= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \int 2x \frac{e^{3x}}{3} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3}\left[x \int e^{3x}\, dx - \int \frac{e^{3x}}{3} dx\right]$$

$$= \frac{x^2\, e^{3x}}{3} - \frac{2x\, e^{3x}}{9} + \frac{2}{27} e^{3x} + C$$

ఉదా - 5: పాక్షిక భిన్నాల ద్వారా ఈ క్రింది ప్రమేయాలను సమాకలనము చేయుము.

(i) $\frac{3x+4}{x^2+x-6}$ (ii) $\frac{2}{x(2-x)}$ (iii) $\frac{x^2}{(x-2)^2}$ (iv) $\frac{1}{x-x^3}$

జవాబు:

(i) $\frac{3x+4}{x^2+x-6} = \frac{3x+4}{(x+3)(x-2)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-2}$ అనుకొనుము

$$\frac{3x+4}{(x+3)(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x+3)}{(x+3)(x-2)}$$

$$3x+4 = A(x-2) + B(x+3)$$

$x = 2,$ $\quad 3 \times 2 + 4 = A(2-2) + B(2+3)$

$$5B = 10 \Rightarrow B = 2$$

$x = -3$ $\quad 3(-3) + 4 = A(-3-2) + B(-3+3)$

$$-5A = -5 \Rightarrow A = 1$$

$$\therefore \frac{3x+4}{(x+3)(x-2)} = \frac{1}{x+3} + \frac{2}{x-2}$$

$$\int \frac{3x+4}{(x+3)(x-2)}\,dx = \int \frac{1}{x+3}\,dx + \int \frac{2}{x-2}\,dx$$

$$= \log(x+3) + 2\log(x-2) + C$$

(ii) $\frac{2}{x(2-x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2-x}$ అనుకొనుము

$$2 = A(2-x) + Bx$$

$x = 0,$ $\quad 2 = 2A \Rightarrow A = 1$

$x = 2,$ $\quad 2 = A(2-2) + 2B \Rightarrow 2B = 2 \Rightarrow B = 1$

$$\frac{2}{x(2-x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x}$$

$$\int \frac{2}{x(2-x)}\,dx = \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{2-x}\,dx = \log x - \log(2-x) + C$$

(iii) $\frac{x^2}{(x-2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2}$ అనుకొనుము

$$x^2 = A(x-2) + B$$

$x = 2,\quad 4 = B$

$x = 0,\quad -2A + B = 0 \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow A = 2$

$$\frac{x^2}{(x-2)^2} = \frac{2}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2}$$

$$\int \frac{x^2}{(x-2)^2}\,dx = \int \frac{2}{x-2}\,dx + \int \frac{4}{(x-2)^2}\,dx$$

$$= 2\log(x-2) + 4\,\frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= 2\log(x-2) - \frac{4}{(x-2)} + C$$

(iv) $\dfrac{1}{x-x^3} = \dfrac{1}{x(1-x^2)} = \dfrac{1}{x(1-x)(1+x)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{1-x} + \dfrac{C}{1+x}$ అనుకొనుము

$1 = A(1-x)(1+x) + Bx(1+x) + Cx(1-x)$

$x = 0,\quad 1 = A$

$x = 1,\quad 2B = 1 \Rightarrow B = \dfrac{1}{2}$

$x = -1,\quad -2C = 1 \Rightarrow C = -\dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{x-x^3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)}$$

$$\int \frac{1}{x-x^3}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \log x - \frac{1}{2}\log(1-x) - \frac{1}{2}\log(1+x) + C$$

$$= \frac{1}{2}\log x^2 - \frac{1}{2}\log(1-x) - \frac{1}{2}\log(1+x) + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) + C$$

ఉదా - 6: ఈ క్రింది వాటికి నిశ్చిత సమాకలనులు కనుగొనుము.

(i) $\int_0^3 e^{5x}\,dx$ (ii) $\int_1^5 \left(x - \frac{2}{x}\right)dx$ (iii) $\int_2^4 (x-2)^2\,dx$

(iv) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ (v) $\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx$ (vi) $\int_1^e \log x\,dx$

జవాబు: (i) $\int_0^3 e^{5x}\,dx = \left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^3 = \frac{e^{5\times 3}}{5} - \frac{e^{5\times 0}}{5}$

$$= \frac{e^{15}}{5} - \frac{1}{5} = \frac{e^{15}-1}{5}$$

(ii) $\int_1^5 \left(x - \frac{2}{x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2\log x\right]_1^5 = \left(\frac{5^2}{2} - 2\log 5\right) - \left(\frac{1}{2} - 2\log 1\right)$

$$= \frac{25}{2} - 2\log 5 - \frac{1}{2} + 0 = 12 - 2\log 5$$

(iii) $\int_2^4 (x-2)^2\,dx = \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_2^4 = \frac{(4-2)^3}{3} - \frac{(2-2)^3}{3} = \frac{8}{3}$

(iv) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 4 - 2 = 2$

(v) $\int_{-3}^{-1}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)dx = \left[\int x^{-2}\,dx - \int x^{-3}\,dx\right]_{-3}^{-1} = \left[\frac{-1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right]_{-3}^{-1}$

$$= \left(\frac{-1}{-1} + \frac{1}{2(-1)^2}\right) - \left(\frac{-1}{-3} + \frac{1}{2(-3)^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{18}\right) = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$$

(vi) $$\int_1^e \log x \, dx = [\, x \log x - x]_1^e = (e \log e - e) - (1 \log 1 - 1)$$

$$= e(\log e - 1) - (0 - 1) = e(1 - 1) + 1 = 0 + 1 = 1$$

ఉదా - 7: ప్రామాణిక రూపాలను ఉపయోగించి సమాకలనము చేయుము.

(i) $(9 + 4x)^{10}$ (ii) $\dfrac{2x}{x^2 + 9}$ (iii) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^3 + 5}}$ (iv) $\dfrac{1}{5 - x^2}$

(v) $\dfrac{x}{2x^2 - 3}$ (vi) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 16}}$ (vii) $\log(3x - 2)$ (viii) $x^5 \log x$

జవాబు: (i) $$\int (9 + 4x)^{10} \, dx = \frac{1}{4} \frac{(9 + 4x)^{10+1}}{10 + 1} + C$$

$$= \frac{(9 + 4x)^{11}}{44} + C$$

(ii) $$\int \frac{2x}{x^2 + 9} \, dx = \int \frac{f^1(x)}{f(x)} \, dx = \log f(x) + C$$

$$= \log\left(x^2 + 9\right) + C$$

(iii) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 + 5}} \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{\sqrt{x^3 + 5}} \, dx = \frac{1}{3} \int \frac{f^1(x)}{\sqrt{f(x)}} \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \times 2 \sqrt{f(x)} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 + 5} + C$$

(iv) $$\int \frac{1}{5 - x^2} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{5}^2 - x^2} \, dx$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2a} \log\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + C$$

$$\therefore \int \frac{1}{5 - x^2}\, dx = \frac{1}{2\sqrt{5}} \log\left(\frac{\sqrt{5}+x}{\sqrt{5}-x}\right) + C$$

(v) $$\int \frac{x}{2x^2 - 3}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x}{2x^2-3}\, dx = \frac{1}{4}\log\left(2x^2 - 3\right) + C$$

(vi) $$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+16}}\, dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4^2}}$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\, dx = \log\left\{\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right\} + C$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4^2}} = \log\left\{\frac{x+\sqrt{x^2+4^2}}{4}\right\} + C$$

(vii) $$I = \int \log\left(3x-2\right) dx$$

$3x - 2 = t$ అనుకొనుము $3dx = dt$

$$I = \int \log t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\left(t \log t - t\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}\left(3x-2\right)\log\left(3x-2\right) - \frac{1}{3}\left(3x-2\right) + C$$

(viii) $$I = \int x^5 \log x\, dx$$

$$I = \int x^n \log x\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\log x - \frac{1}{n+1}\right) + C$$

$$\therefore I = \int x^5 \log x\, dx = \frac{x^6}{6}\left(\log x - \frac{1}{6}\right) + C$$

15.5 అభ్యాసము:

1. ఈ క్రింది వానిని x దృష్ట్యా సమాకలనము చేయుము.

(i) 15 (ii) $\frac{x}{5}$ (iii) 2kx (iv) $9x^{-2}$ (v) x^3+5x^2-6x-8

(vi) $x^{3/2}-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x}-9$ (vii) $8-9x-x^5$ (viii) $(1-2x)(1+3x)$

(ix) $\frac{x^4+1}{x^2}$ (x) $4e^x+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}$ (xi) $2x^2-x-1$ (xii) $\frac{x^3+x^2-1}{x^2}$

2. ప్రతిక్షేపణ పద్ధతుల ద్వారా ప్రమేయములను సమాకలనము చేయుము.

(i) $(3x+7)^5$ (ii) $\left(x^3+5\right)^{1/2}x^2$ (iii) $(x+b)^n$ (iv) e^{mx}

(v) $\frac{1}{5x+6}$ (vi) $\frac{1}{x^2-16}$ (vii) $\frac{2x}{x^2+9}$ (viii) $\frac{1}{3-4x}$

3. విభాగ సమాకలనము చేయుము.

(i) xe^x (ii) $xe^{x/2}$ (iii) $\log(3x-2)$ (iv) $\left(2x^2+5\right)e^{3x}$

4. ఇచ్చిన ప్రమేయములను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడగొట్టి సమాకలనము చేయుము.

(i) $\frac{1}{(2-x)(x\quad 1)}$ (ii) $\frac{x}{(x-1)(2x+1)}$ (iii) $\frac{1}{x(x-3)}$ (iv) $\frac{1}{x^2-4}$

(v) $\frac{1}{4x-3-x^2}$

5. నిశ్చిత సమాకలనులు కనుగొనుము.

(i) $\int_3^5 6x^5\,dx$ (ii) $\int_{-1}^{1}\left(2x^2-x^3\right)dx$ (iii) $\int_6^{10}\frac{1}{x+2}\,dx$

రచయిత

శ్రీమతి ఎస్.వి.ఎస్. గిరిజ

పాఠం 16

ఏకఘాత ప్రణాళిక

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశమును తెలుసుకోగలరు.

* ఏకఘాత ప్రణాళిక గూర్చి సోదాహరణముగా అవగాహన

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమము :

16.1 ఏకఘాత ప్రణాళిక వివరణ

16.2 ఏకఘాత ప్రణాళిక ఆవశ్యకతలు

16.3 ఏకఘాత ప్రణాళికలను రూపొందించుట

16.4 ఏకఘాత ప్రణాళిక అనువర్తనాలు

16.5 ఏకఘాత ప్రణాళిక పరిధి

16.6 ఏకఘాత ప్రణాళిక అవధులు

16.7 అభ్యాసము

16.1 ఏకఘాత ప్రణాళిక వివరణ:

పారిశ్రామిక, ఆర్థిక రంగాలలో పరిమిత వనరులను ఉపయోగించి గరిష్ట లాభాలను (Maximum Projects) పొందటానికి లేదా ఉత్పత్తికయ్యే ఖర్చులు కనిష్టము (Minimization) చేసి గరిష్ట లాభాలను పొందడం వంటి సమస్యలకు ఏకఘాత ప్రణాళిక ప్రక్రియను ఉపయోగిస్తున్నారు. కొన్ని వనరుల నియమాలకు లోబడిన ఒక లక్ష్య ప్రమేయాన్ని అభిలషణీయంగా గరిష్టీకరణం లేదా కనిష్టీకరణం చేయటానికి ఏకఘాత ప్రణాళిక ఎంతో దోహదపడుతుంది. ఈ నియమాలు ఏకఘాత సమీకరణాలలో లేదా అసమీకరణాలలో వుంటాయి. లక్ష్య ప్రమేయం కూడా నిర్ణయ చలరాశులలో ఏకఘాత ప్రమేయంగా వుండాలి. లక్ష్య ప్రమేయం, లాభంలో మూల్యాలు, ఉత్పత్తి సామర్థ్యాలు మొ॥న వాటిలో కూడా వుంటాయి. విఫణి గిరాకీ, ఉత్పత్తి పద్ధతులు యంత్ర సామాగ్రి నిల్వ చేసే స్థావరాలు, ముడి సరుకులు అందుబాటు మొ॥న పరిమిత వనరుల వల్ల నియమాలు వస్తాయి.

శాస్త్ర పారిభాషిక పదాలు (Terminology) : రెండు అంతకంటే ఎక్కువ చలరాసులలో గల అనుపాత సంబంధాన్ని ఏకఘాతాన్ని ఉపయోగించి వివరిస్తారు. ఉదా॥కు ఉత్పత్తిని రెండు రెట్లు చేసిన లాభాలు కూడా రెండు రెట్లు అయినపుడు ఆ చలరాశులలో గల సంబంధం ఏకఘాతముగా (Linear) వుంటుంది. పరిమిత వనరులను ఉపయోగించి చైతన్యాలను (activities) ఒక పద్ధతిలో రూపొందించి అభిలషణీయమైన ఫలితాలను పొందేదాన్ని 'ప్రణాళిక' అంటారు.

16.2 ఏకఘాత ప్రణాళికకు ఆవశ్యకతలు:

1. నిర్ణయ చలరాశులు, వాటి సంబంధం (Decision Variables and their Relationship) : నిర్ణయ చలరాశులు, ఉత్పత్తి సేవలు, ప్రాజెక్టులు మొదలగు వాటిని తెలియజేస్తుంది. నిర్ణయ చలరాశులు ఒకదానికొకటి పోటీపడి లభ్యమైన పరిమిత వనరులను పంచుకొంటాయి. వనరులను ఉపయోగించుకోవటంలో నిర్ణయ చలరాశులు ఒకదానికొకటికి గల సంబంధం ఏకఘాతంలో వుంటుంది. ఈ చలరాశులకు సమకాలిక సాధనం అవసరం.

2. లక్ష్య ప్రమేయం (Objective Function) : ఏకఘాత ప్రణాళికకు అభిలషణీయమైన లక్ష్య ప్రమేయం సమగ్రంగా నిర్వహించబడి వుండాలి. ఉదా॥కు లాభాలను గరిష్టం చేయడం, మూల్యాలను లేదా వ్యవస్థకు గడిచిన కాలాన్ని కనిష్టం చేయడం మొదలగునవి, సమగ్రంగా నిర్వహించబడవలె. ఈ లక్ష్య ప్రమేయంలో నిర్ణయ చలరాశులు ఏకఘాత ప్రమేయంలో ఉండాలి.

ఒక ప్రణాళికా సమస్యలో ఏ ప్రమేయమైతే గరిష్టం లేక కనిష్టం గావించబడుతుందో ఆ ప్రమేయమును ఉద్దేశ్య ప్రమేయము అంటారు. ఈ ప్రక్రియలో చలరాసులన్ని కొన్ని ఏకఘాత సంయోగములకు లోబడి ఉంటాయి. అటువంటి ఏకఘాత సంయోగములనే షరతులు అంటారు.

3. నియమాలు (Constraints) : పోటీ గల విభిన్న చైతన్యాల మధ్య కేటాయింపు చేసే వనరులకు అవధులు ఉండాలి. ఈ వనరుల శ్రామిక శక్తి కాలం, స్థలాలు, యంత్రాలు మొదలగునవి. ఇవి నిర్ణయ చలరాశులలో ఏకఘాత సమీకరణాలుగా గాని లేదా అసమీకరణాలుగా గాని వివరించటానికి అనువుగా ఉండాలి.

4. చర్య ప్రత్యామ్నాయ మార్గాలు (Alternative Courses of Action) : సమస్యలో చర్య ప్రత్యామ్నాయ మార్గాలు ఉండాలి. ఉదా॥కు వస్తువు ఉత్పత్తిలో ఒక పద్ధతికి బదులు మరొక పద్ధతిని ప్రతిక్షేపించవచ్చు.

5. ఋణేతర ప్రతిబంధకాలు (Non Negative Restrictions) : అన్ని చలరాశులను ఋణేతర విలువలుగా ఊహించుకోవాలి. అంటే అన్ని చలరాసుల విలువలు సున్నా కాని లేదా సున్నా కంటే ఎక్కువ గాని ఉండాలి. కాబట్టి ఫలితాలలోని చలరాశుల విలువలు ఋణాత్మకంగా ఉండకూడదు.

6. రేఖీయత, విభాజ్యత (Linearity and Divisibility) : అన్ని సంబంధాలు (లక్ష్య ప్రమేయం నియమాలు)ను చూపించాలి. అంటే నిర్ణయ చలరాశుల మధ్య సంబంధాలు అనులోమానుపాతంలోవుండాలి. ఉదా॥కు కొంత శాతంలో వనరులు పెరిగిన అదే శాతంలో ఉత్పత్తి పెరగాలి. విభాజ్యత అంటే చలరాశుల విలువలు పూర్ణాంకాలే కాకుండా భిన్న విలువలు కూడా రావచ్చును.

7. ఖచ్చితత్వము (Deterministic) : ఏకఘాత ప్రణాళిక నమూనాలోని అన్ని నమూనా గణకాలు తెలిసినవే. ఉదా॥కు ప్రతి యూనిట్ ఉత్పత్తి పై వచ్చే లాభం, అందుబాటులో వున్న వనరుల పరిమాణం ప్రణాళికా కాలంలో స్థిరముగా వుంటుందని ఊహించుకోవాలి.

16.3 ఏకఘాత ప్రణాళికలను రూపొందించుట:

ఒక ఉద్దేశ్య ప్రమేయము, కొన్ని షరతులకు లోబడి గరిష్టము గాని, కనిష్టము గాని చేయుటను ప్రణాళిక సమస్య అంటారు. ఈ సందర్భములో కనుగొనవలసిన చలరాశులలో ఉద్దేశ్య ప్రమేయము, షరతులు ఏకఘాత సంయోగాలయితే అటువంటి సమస్యను ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్య అంటారు. షరతులు సమానతలు గాని, అసమానతలు గాని కావచ్చును.

ఇక్కడ రూపొందించటం అంటే సమస్యను సరైన గణిత సంబంధంలో వ్రాయటం లేదా వివరించడం. కనిష్టీకరణ, గరిష్టీకరణ భావములను ఈ క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా వివరిద్దాము.

ఉదా॥ - 1 : ఒక కర్మాగారం రెండు రకాల ఆటవస్తువులను తయారు చేస్తుంది. కార్లు, విమానాలు చేయటానికి A, B అను రెండు యంత్రాలను వాడతారు. కార్లను తయారు చేయటానికి A యంత్రాన్ని 2 గంటలు, B యంత్రాన్ని 3 గంటలు, విమానాన్ని తయారు చేయటానికి A యంత్రాన్ని 3 గంటలు, B యంత్రాన్ని 1 గంట వాడాలి. ఏ యంత్రాన్ని 20 గం॥లు కంటే ఎక్కువ పని చేయనీయరు. కారు పై 5 రూపాయలు, విమానం పై 10 రూపాయలు లాభం వస్తుంది. లాభాన్ని గరిష్టం చేయటానికి ప్రతిదినం ఎన్ని కార్లు, ఎన్ని విమానాలను తయారు చేయాలి.

గరిష్ట లాభం ఎంత: ఈ సమస్యను ఏకఘాతాత్మక ప్రణాళికా సమస్యలలో గరిష్టీకరణ సమస్యగా భావించవచ్చును.

రోజూ కర్మాగారంలో x_1 కార్లు, x_2 విమానాలు తయారు చేస్తారు అనుకొందాం. x_1 , x_2 లు ఋణేతరం చలరాశులు.

కాబట్టి $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$....................(1)

ఈ ఉత్పత్తి కొరకు

యంత్రం A ను వాడే మొత్తము కాలం $= 2X_1 + 3X_2$

యంత్రం B ను వాడే మొత్తము కాలం $= 3X_1 + X_2$

ఏ యంత్రాన్ని 20 గంటల కన్నా ఎక్కువ పని చేయించరు.

కాబట్టి $2X_1 + 3X_2 \leq 20$ ....(2)

$3X_1 + X_2 \leq 20$ .... (3)

x_1 కార్లు, x_2 విమానాల అమ్మకం ద్వారా లాభం $= 5X_1 + 10X_2$. ఇది ఉద్దేశ్య ప్రమేయము అవుతాంది.

(1), (2) మరియు (3) నియమాలను పాటిస్తే $(5X_1 + 10X_2)$ అనే లక్ష్యపు ప్రమేయాన్ని గరిష్టీకరణం చేయడం ఇక్కడ సమస్య.

ఉదా॥ - 2: ఒక మిశ్రమ ఆహారంలో కనీసం 400 యూనిట్ ప్రమాణాల విటమిన్లు, 500 ప్రమాణాల ఖనిజాలు మరియు 1000 కేలరీలు ఉండాలి. F_1 , F_2 అనే రెండు రకాల ఆహారాలు ఉన్నాయి. F_1 ఖరీదు ప్రమాణానికి 5 పైసలు, F_2 ఖరీదు ప్రమాణానికి 3 పైసలు. F_1 ప్రమాణాహారములో 2 యూనిట్ల విటమిన్లు, 1 యూనిట్ ఖనిజాలు, 2 కేలరీలు వున్నాయి. రెండో ఆహారం F_2 ప్రమాణములో 1 విటమిన్ ప్రమాణము, 2 ప్రమాణాల ఖనిజాలు, 4 కేలరీలు ఉన్నాయి. కనీస పోషక అవసరాలను తీర్చునట్లుగా ఈ రెండు ఆహారాలు మిశ్రమ ఆహార కనిష్ట ఖరీదు కనుగొనుము.

ఈ సమస్యను ఏకఘాతాత్మక ప్రణాళికా సమస్యలలో కనిష్టీకరణ సమస్యగా భావించవచ్చు.

మిశ్రమ ఆహారంలో F_1 , F_2 ల పరిమాణాలు వరుసగా X_1 , X_2 లు అనుకోండి. X_1 , X_2 లు ఋణేతర చలరాశులు.

కాబట్టి $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$.....................(1)

ఆహార మిశ్రమంలో విటమిన్ల మొత్తం పరిమాణం $= 2x_1 + x_2$

కనీసం 400 ప్రమాణాల విటమిన్లు ఉండాలి. కాబట్టి

$2x_1 + x_2 \geq 400$ ....(2)

ఖనిజాల మొత్తం $= x_1 + 2x_2$

కనీసం 500 ప్రమాణాల ఖనిజాలు ఉండాలి. కాబట్టి

$x_1 + 2x_2 \geq 500$ ....(3)

కేలరీల మొత్తం $= 2x_1 + 4x_2$

కనీసం 1000 కేలరీలు ఉండాలి కాబట్టి

$2x_1 + 4x_2 \geq 1000$................(4)

ఈ సమీకరణాన్ని 2తో భాగిస్తే (3) వ సమీకరణం వస్తుంది.

కాబట్టి $2x_1 + x_2 \geq 400$ ....(5)

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ ....(6)

$x_1 + 2x_2 \geq 500$...............(7)

(5), (6) మరియు (7) నియమాలను పాటిస్తే $(5x_1 + 3x_2)$ అనే లక్ష్య ప్రమేయంను కనిష్టీకరణం చేయటం దీని సమస్య.

16.4 ఏకఘాత ప్రణాళికా అనువర్తనాలు:

1. ఉత్పత్తి నిర్వహణ : ఏకఘాత ప్రణాళికను అనువర్తించి యంత్రాలు, శ్రామిక శక్తి వంటి వనరులను అత్యుత్తంగా ఉపయోగించి అభిలషణీయమైన మిశ్రమ ఉత్పత్తులను కనుగొనవచ్చు. గిరాకీని బట్టి ఉత్పత్తిలో స్వల్ప మార్పులు చేర్పులు చేయవచ్చు.

ఉదాహరణ : ఒక గృహ ఉపకరణాలను ఉత్పత్తి చేసే కర్మాగారంలో అందుబాటులో వున్న వనరులను ఉపయోగించి కుర్చీలు, మేజాలను ఉత్పత్తి చేయటానికి ప్రణాళికను రూపొందిస్తున్నారు. ఆ కర్మాగారానికి 400 ఘనపుటడుగులు కలప, 450 వ్యక్తి గంటలు అందుబాటులో వున్నాయి. ఒక కుర్చీ చేయటానికి 10 ఘనపుటడుగులు కలప, 10 వ్యక్తి గంటలు అవసరం. ఒక మేజా తయారు చేయటానికి 20 ఘనపుటడుగులు కలప, 15 వ్యక్తి గంటలు అవసరమౌతాయి. ఒక కుర్చీకి వచ్చే లాభం 45 రూపాయలు. ఒక మేజాకు వచ్చే లాభం 80 రూపాయలు. అందుబాటులో ఉన్న వనరులను ఉపయోగించి కర్మాగారానికి అత్యధిక రాబడి రావటానికి ఎన్ని కుర్చీలు ఎన్ని మేజాలు ఉత్పత్తి చేయాలి.

2. విఫణి నిర్వహణ (Marketing Management) : అందుబాటులో ఉన్న ప్రకటనలను, ప్రచారాలను వినియోగదారుల చేరికను విశ్లేషించటానికి ఈ ఏకఘాత ప్రణాళిక దోహదపడుతుంది. పన్ను విక్రేతలు, వివిధ ప్రదేశాలకు వెళ్ళటానికి అయ్యే ఖర్చులను కనిష్ఠం చేయటానికి ఇది ఉపయోగపడుతుంది. వనరులు వివిధ ఉత్పత్తి స్థావరాల నుంచి విఫణి స్థలాలకు అయ్యే మొత్తం ఖర్చుని కనీసం చేయటానికి ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదాహరణ: ఒక ప్రకటనల సంస్థ రెండు రకాలైన ప్రేక్షకులను ఆకర్షించటానికి ప్రణాళిక తయారు చేస్తుంది. ప్రేక్షకుల సంవత్సర

ఆదాయం 15,000/- ఎక్కువ ఉంటే వారిని A రకమైన ప్రేక్షకులని విభజించారు. మొత్తం ప్రకటనలకు అయ్యే ఖర్చు కోసం 20,000/- కేటాయించారు. దూరదర్శన్‌లో ఒక ప్రకటనకు అయ్యే ఖర్చు 50,000/-, ఆకాశవాణిలో ఒక ప్రకటనకు అయ్యే ఖర్చు 20,000/-. గుత్త (Contract) కారణాల వల్ల దూరదర్శన్‌లో కనీసం మూడు ప్రసారాలు, ఆకాశవాణిలో గరిష్ట ప్రసారాల సంఖ్య అయిదు. ఒక దూరదర్శిని ప్రసారం 4,50,000 A రకమైన ప్రేక్షకులకు, 50,000 B రకమైన ప్రేక్షకులకు చేరుతుంది. ఒక ఆకాశవాణి ప్రసారం 20,000 A రకమైన ప్రేక్షకులకు, 80,000 B రకమైన ప్రేక్షకులకు చేరుతుంది. ప్రసారాలు చేరే ప్రేక్షకుల సంఖ్యను గరిష్టం చేయటానికి ప్రకటనలను, ప్రసారాల మిశ్రమాన్ని కనుక్కోవాలి.

3. సిబ్బంది నిర్వహణ (Personnel Management): సిబ్బందిని నియమించటం, ఎన్నుకోవటం శిక్షణా శ్రామిక శక్తిని అభివృద్ధిపరచటం మొదలైన సమస్యలకు విశ్లేషించే సిబ్బంది నిర్వహణకు ఏకఘాత ప్రణాళిక ఉపకరిస్తుంది.

ఉదాహరణ: ఒక కంపెనీలో గుణ నియంత్రణ తనిఖీ కోసం A, B గ్రేడ్‌లకు చెందిన తనిఖీ చేసే వారున్నారు. 8 గం॥ పని దినంలో కనీసం 1500 వస్తువులను తనిఖీ చేయాలి. A గ్రేడ్ తనిఖీదారుడు 96% యదార్థతతో గంటకు 14 వస్తువులను తనిఖీ చేయగలడు. A గ్రేడ్ తనిఖీదారునికి గంటకు 5/- చొప్పున, B గ్రేడ్ తనిఖీదారునికి గంటకు 4 రూ॥ చొప్పున వేతనం చెల్లించాలి.

తనిఖీదారుడు చేసే ఒక తప్పుకు కంపెనీకి 3 రూపాయల నష్టం వస్తుంది. కంపెనీలో మొత్తం A గ్రేడ్ తనిఖీవారు 10 మంది, B గ్రేడ్ తనిఖీ వారు 15 మంది వున్నారు. రోజుకు తనిఖీకి అయ్యే ఖర్చు కనిష్టం చేయటానికి తనిఖీదారుల యొక్క అభిలషణీయమైన కేటాయింపు కనుక్కోండి.

4. ఆర్థిక నిర్వహణ (Financial Management): చాలా రకాలైన ప్రత్యామ్నాయాలలో ప్రత్యేకమైన పెట్టుబడులను ఎన్నుకోవటంలో ఏకఘాత ప్రణాళిక ఉపయోగపడుతుంది. అంతరంగా, బాహ్యంగా నిధుల ఉత్పన్నం పై ఉత్పత్తి నిర్ణయాలు తీసుకోవటంలో ఈ ఏకఘాత ప్రణాళిక కూడా దోహదపడుతుంది.

5. వ్యవసాయం (Agriculture): వ్యవసాయ రంగంలో దీని అనువర్తనాలు ముఖ్యంగా రెండు విధాలు.

i) Farm Economics :

ii) **వ్యవసాయ క్షేత్ర నిర్వహణ :**

వీటిలో మొదటిది ప్రాంతంలో గాని లేదా దేశంలో గాని వ్యవసాయ రంగం యొక్క ఆర్థిక పరిస్థితులను గురించి తెలియచేస్తుంది. రెండోది ఒక వ్యవసాయ క్షేత్రం సమస్యల గురించి సంబంధం గలిగి ఉంటుంది. Farm Economics పరిశీలన వివిధ ప్రాంతాల మధ్య పోటీని అభిలషణీయమైన పంటల ఉత్పత్తుల కోసం వ్యవసాయ క్షేత్రాల కేటాయింపుకు ఉపయోగపడుతుంది. ఏకఘాత ప్రణాళికను ఉపయోగించి వివిధ ప్రాంతాలలోని భూ వనరులు దేశంలో ఉత్పత్తుల గిరాకీకి గల నియమాలను బట్టి సామర్థ్యమైన ఉత్పత్తి రకాలను సూచించవచ్చు.

వ్యవసాయ ప్రణాళికలో కూడా ఏకఘాత ప్రణాళికను ఉపయోగించవచ్చు. ఉదా॥ నికర లాభం గరిష్టం చేయటానికి అందుబాటులో ఉన్న భూమి, కూలీలు, నీటి సదుపాయం, పెట్టుబడి వంటి పరిమిత వనరులను కేటాయించటానికి ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదా॥ ఒక వ్యవసాయదారునకు 100 ఎకరాల పొలం ఉంది. దానిలో అతను ప్రత్తి, మిర్చి, పొగాకు పంటలను పండించవచ్చు. ఒక ఎకరం ప్రత్తి పంట పొగాకు రూ॥ 500/-, 20 పని దినాలు కావాలి. దాని మీద వచ్చే లాభం ఎకరానికి రూ॥ 1000/-. ఒక ఎకరం మిర్చి పంట సాగుకు ఖర్చు రూ॥ 400/-, 15 పని దినాలు కావాలి. దాని మీద వచ్చే లాభం ఎకరానికి రూ॥ 1500/-. ఆ వ్యవసాయదారునకు 8000 పని దినాలు, 1,00,000/- పెట్టుబడి అందుబాటులోవున్నా లాభాన్ని గరిష్టం చేయటానికి ఏ పంటకు ఎన్ని ఎకరాలను కేటాయించాలి.

6) రక్షణ (Defence) : రక్షణ అనువర్తనంలో యుద్ధ విమానాలకు కావలసిన ఇంధనం మొత్తాన్ని కనిష్టం చేస్తూ శత్రు స్థావరాన్ని కదలకుండా చేసే ఆకాశ యుద్ధ వ్యవస్థను ఎన్నుకోవటంలో ఏకఘాత ప్రణాళిక ఉపయోగపడుతుంది. వివిధ స్థావరాలలో ఉన్న సైన్యాన్ని, ఆయుధ సామాగ్రిని కనిష్టంగా ఉపయోగించి వివిధ శత్రు స్థావరాలను గరిష్టంగా నష్టం కలిగించటం వంటి సమస్యలలో కూడా ఈ ఏకఘాత ప్రణాళిక ఉపయోగించబడుతుంది.

ఉదా॥ వ్యూహాత్మకంగా బాంబులు వేసి విమాన స్థావరాలను శత్రువుల టాంక్‌ల ఉత్పత్తిని విఘ్నం కలిగించటానికి ఆదేశాలు వచ్చినవి. శత్రువుకు 4 ప్రాంతాలలో కీలక ఉత్పత్తి స్థావరాలువున్నాయి. వీటిలో ఏ ఒక్క దానిని నాశనం చేసిన అన్ని స్థావరాలలో మొత్తం టాంక్‌ల ఉత్పత్తి ఆగిపోతుంది. ఈ పనిని సాధించుటకు ఇంధనం 45,000 లీటర్లు మాత్రమే ఉంది. ఏ ప్రాంతానికి పంపించిన యుద్ధ విమానానికైనా రాకపోకలకు కావలసిన ఇంధనమే కాక కనీసం 100 లీటర్లు అదనంగా ఇంధనం వుండాలి. స్థావరాలలో ఉన్న యుద్ధ విమానాల రకాలు వాటి సంఖ్యను క్రింద చూపించిన పట్టికలో వివరించడమైనది.

విమానరకము	వివరణ	లీటరు కి.మీ.	ఆ విమాన దూరంలో వున్న సంఖ్య
A	భారీ	2	40
B	మధ్య తరగతి	2.5	30

స్థావరాలున్న ప్రదేశాలు రెండు రకాలైన యుద్ధ విమానాలకు సంబంధించిన సంభావ్యతల సమాచారం కింది పట్టికలో ఇవ్వడమైనది.

స్థావరం ఆధారం నుంచి దూరం నాశనం చేయబడే సంభావ్యత

స్థావరం	ఆధారం నుంచి దూరం కి॥మీ॥	నాశనం చేయబడే సంభావ్యత భారీ యుద్ధ విమానం	మధ్య తరగతి యుద్ధ విమానం
1	400	0.10	0.08
2	450	0.20	0.16
3	500	0.15	0.12
4	600	0.25	0.20

సంభావ్యత సాఫల్యాన్ని గరిష్టం చేయటానికి ఏ రకానికి చెందిన ఎన్ని యుద్ధ విమానాలను పంపించాలి. 4 లక్ష్యాలకు వాటిని ఏ విధంగా కేటాయించాలి.

16.5 ఏకఘాత ప్రణాళిక పరిధి (Scope):

1. కేటాయింపు రకమైన సమస్య సాధించటం కోసం ఏకఘాత ప్రణాళిక ఉపయోగపడుతుంది. ఇటువంటి సమస్యలు ఎక్కువగా పరిశ్రమలలోను, వ్యాపార నిర్వహణలోనూ, సాంఘీక పరిశీలనలలోనూ, రక్షణ శాఖలలోనూ, చాలా ముఖ్యమైన పాత్ర వహిస్తాయి. వీటి సాధన చాలా కష్టమైనది. ఎందుకంటే వాటికి అనుచితమైన సాధనలు వుండవచ్చు. ఏకఘాత ప్రణాళిక ఇటువంటి సమస్యలకు అభిలషణీయమైన సమాధానాలను రాబట్టడమే కాకుండా ఆచరణ యోగ్య సాధన కొరకు అదనంగా కేటాయింపుకయ్యే వనరుల విలువలను కూడా తయారు చేస్తుంది.

2. సమస్యల పరిధిలో లేని నియమాలను కూడా లెక్కలోకి తీసుకొని ఏకఘాత ప్రణాళిక అన్ని విధములైన సమాధానాలను, ప్రయోగాత్మక సమాధానాలను కూడా ఇస్తుంది.

3. ఉన్న నిర్ణయాలలో అతి శ్రేష్టమైన నిర్ణయం ఎన్నుకోవటంలో ఏకఘాత ప్రణాళిక ఎంతగానో ఉపయోగపడుతుంది. ఇది నిర్ణయాలను వైయుక్తంగా కాకుండా నిరాపేక్ష లక్ష్యం కలిగినవిగా చేస్తుంది.

4. ఉత్పత్తి చేసే విధానంలో వచ్చే ఇబ్బందులను ఏకఘాత ప్రణాళిక ప్రముఖంగా సూచిస్తుంది.

5. ఉత్పత్తి కారకాలను అభిలషణీయంగా ఉపయోగించుకోవటానికి ఏకఘాత ప్రణాళిక దోహదపడుతుంది. ఈ ఉత్పత్తి కారకాల సాపేక్ష ప్రాముఖ్యాన్ని, ఉపయోగాలను ఎక్కువ ప్రభావితం చేసి సూచిస్తుంది.

16.6 ఏకఘాత ప్రణాళిక అవధులు:

ఏకఘాత ప్రణాళికకు ఎన్ని అనువర్తనాలు ఉన్నప్పటికీ ఇది క్రింద వివరించిన కొన్ని అవధులకు లోబడింది.

1. లక్ష్య ప్రమేయం నియమాలు ఏకఘాతంలో ఉండాలని ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యలలో ఊహించుకోవాలి. కాని సహజంగా నిజ జీవితంలో ఉండే వ్యాపార పారిశ్రామిక సమస్యలలో లక్ష్య ప్రమేయాలు, నియమాలు, ఏకఘాతంలో వుండకపోవచ్చు. కాబట్టి ఇటువంటి సమస్యలను ఏకఘాత ప్రణాళిక పద్ధతి ద్వారా సాధన చేయలేం.

2. ఏకఘాత ప్రణాళికా పద్ధతి ద్వారా సాధించిన అభిలషణీయమైన సమాధానం పూర్ణ సంఖ్యలలో వుంటుందని చెప్పలేం.

   ఉదా॥కు ఒక పనిని చేయటానికి ఎంత మంది మనుషులు, ఎన్ని యంత్రాలు కావాలనే సమస్యకు సమాధానం భిన్నాలలో రావచ్చు. ఆ భిన్నములను దగ్గరి పూర్ణ సంఖ్యకు సవరించిన సమాధానం అభిలషణీయమైన సమాధానం కాకపోవచ్చు. ఇటువంటి సమస్యలకు సార్వత్రిక ఏకఘాత ప్రణాళిక పద్ధతిని ఉపయోగించలేము.

3. ఏకఘాత ప్రణాళిక నమూనా పై కాలం ప్రభావం, అనిశ్చితత్వాన్ని పరిగణనలోనికి తీసుకోలేము.

4. నమూనాలో ఉండే పరిమితులు స్థిరమని ఊహించుకోవాలి. కాని నిజ జీవిత సందర్భాలలో ఈ పరిమితులు ఖచ్చితంగా తెలియకపోవచ్చు లేదా స్థిరంగా వుండకపోవచ్చు.

5. ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యలలో ఒకే ఒక లక్ష్య ప్రమేయం ఉంటుంది. కాని నిజ జీవిత సందర్భాలలో ఒకటి కంటే ఎక్కువ లక్ష్య ప్రమేయాలు గల సమస్యలు ఎదురౌతాయి.

16.7 అభ్యాసము:

ఎ. ఈ క్రింది వానికి సంక్షిప్తంగా జవాబులు రాయండి.

1. పరిక్రియల పరిశోధన వివరింపుము?
2. పరిక్రియల పరిశోధన నిర్వచనం?
3. గణతాత్మక నమూనాలను గూర్చి వివరింపుము?

4. ఏకఘాత ప్రణాళికను గూర్చి వివరణ?

5. ఏకఘాత ప్రణాళిక సమస్యలను రూపొందింపుము?

6. ఏకఘాత ప్రణాళిక పరిధులు - వివరణ?

7. ఏకఘాత ప్రణాళిక యొక్క అవధులు వ్రాయుము?

8. కొరత గల ఆధార ఆచరణీయ సాధన గూర్చి వ్రాయుము?

9. నిబంధన లేని చలరాశులను వివరింపుము?

బి. ఈ క్రింది వానికి విపులంగా జవాబులు రాయండి.

1. పరిక్రియల పరిశోధన ఉపయోగాలు గూర్చి వివరణ.

2. పరిక్రియల పరిశోధనలో నమూనాలు.

3. పరిక్రియ పరిశోధనలో దశలు.

4. ఏకఘాత ప్రణాళికకు ఆవశ్యకతలు.

5. ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యలకు గణిత సంబంధమైన రూపకల్పన.

6. ఏకఘాత ప్రణాళిక మౌలిక సిద్ధాంతంను వివరింపుము.

రచయిత

డా॥ కె. చందన్

పాఠం 17

ఏకఘాత ప్రణాళిక - రేఖాచిత్ర పద్ధతి

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలను తెలుసుకోగలరు.

* ఏకఘాత ప్రణాళిక సమస్యలకు రేఖాచిత్రాలను గీయడం
* లక్ష్య ప్రమేయమునకు గరిష్ఠ మరియు కనిష్ఠ విలువలను రాబట్టడం నేర్చుకుంటాము.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

17.1 ఏకఘాత ప్రణాళిక సమస్యకు రేఖాచిత్ర పద్ధతి :

ఏకఘాత ప్రణాళిక సమస్యలకు అభిలషణీయమైన సాధనాన్ని కనుక్కోవటానికి ఎన్నో పద్ధతులు లేదా అల్‌గారిథమ్స్ (Algorithms) ఉన్నాయి. వాటిలో ఒకటి రేఖాచిత్ర పద్ధతి. ఈ రేఖాచిత్ర పద్ధతిని గురించి తెలుసుకుందాం. రెండు చలరాశులలో ఉత్పన్నమయ్యే ఏకఘాతాత్మక ప్రణాళికా సమస్యలను సాధించటానికి ఈ రేఖాచిత్ర పద్ధతి ఉపయోగపడుతుంది.

విధాన సోపానాలు :

1. అసమీకరణాలు లేదా సమీకరణ రూపాలలో అన్ని షరతుల జాబితాను తయారు చేయాలి.
2. గరిష్ట లేదా కనిష్టం చేయాల్సిన లక్ష్య ప్రమేయానికి సమాసాన్ని వ్రాయాలి.
3. అసమీకరణాల వ్యవస్థకు రేఖా చిత్రం గీయాలి.
4. బహుభుజి ప్రాంత శీర్షాలను కనుక్కోవాలి.
5. బహుభుజి ప్రతి శీర్షం దగ్గర లక్ష్య ప్రమేయం విలువను కనుక్కోవాలి.
6. యే శీర్షం వద్ద లక్ష్య ప్రమేయం విలువ గరిష్టమో, కనిష్టమో అదే కావలసిన అభిలషణీయ సాధన విలువ

17.2. ఉదాహరణలు :

1. ఒక ఉత్పత్తిదారుని వద్ద 75 కి.గ్రాముల కాఫీ పొడి, 120 కి.గ్రాల చికోరి పొడి వుంది. వాటిని కలిపి 1 కిలోగ్రాములు సంచులుగా ఈ విధంగా తయారు చేశారు. తక్కువ రకం మిశ్రమంలో 250 గ్రాముల కాఫీ పొడి, 750 గ్రాముల చికోరి పొడి ఉంటుంది. మేలు రకం

మిశ్రమంలో 500 గ్రాముల కాఫీపొడి, 500 గ్రాముల చికోరి పొడి వుంటుంది. తక్కువ రకం మిశ్రమంపై వ్యాపారికి సంచికి 25 పైసలు. మేలు రకం సంచిపై 45 పైసలు లాభం వస్తుంది. గరిష్ట లాభాన్ని పొందటానికి అతడు ఒక్కొక్క రకం సంచులను ఎన్నింటిని ఉత్పత్తి చేయాలి.

సాధన : తక్కువ రకం సంచుల సంఖ్య = X_1

మేలు రకం సంచుల సంఖ్య = X_2 అనుకోండి.

లక్ష్య ప్రమేయం $Z = 0.25X_1 + 0.45X_2$

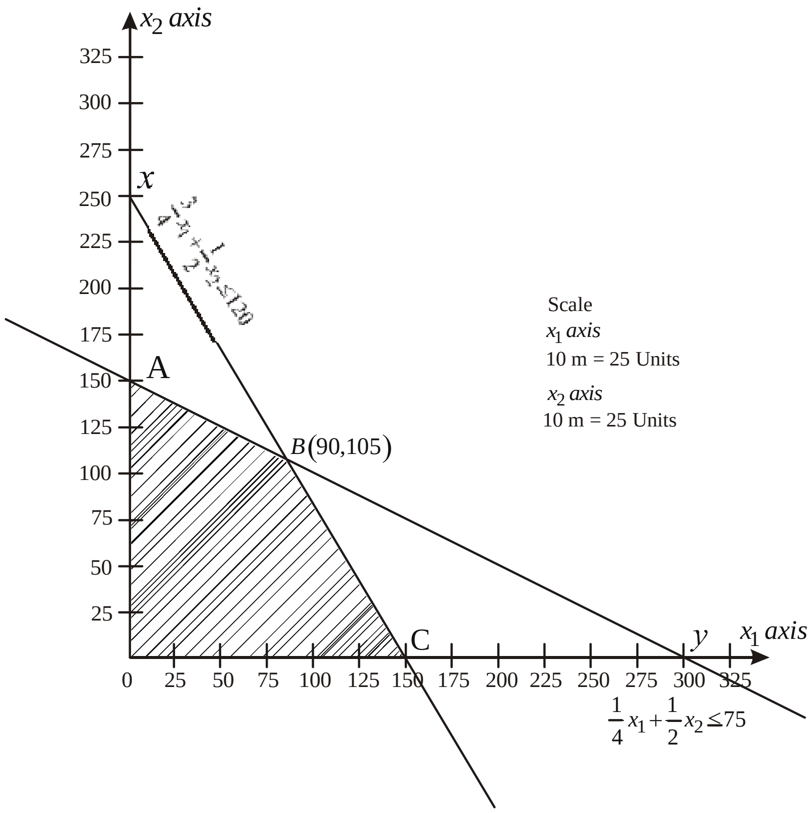
సంచుల సంఖ్య ఋణ సంఖ్య కాదు కాబట్టి $X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0$ --------- (1)

రెండు రకాలలోని మొత్తం కాఫీ పొడి బరువు = $\frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{2}X_2$

కాని మొత్తం బరువు 75 కి.గ్రా.లకు మించరాదు.

$$\frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{2}X_2 \leq 75$$

అంటే $X_1 + 2X_2 \leq 300$ --------- (2)



పటము - 1

రెండు రకాలలో మొత్తం చికోరి పొడి బరువు = $\frac{3}{4}X_1+\frac{1}{2}X_2$

కాని మొత్తం బరువు 120 కి. గ్రా. కు మించదు.

$\therefore \frac{3}{4}X_1+\frac{1}{2}X_2 \le 120$ అంటే

$3X_1+2X_2 \le 480$ ------- (3)

లాభప్రమేయాన్ని గరిష్ఠం చేయడమే పై సమస్య

(1), (2), (3) అసమీకరణాల కనుగుణంగా

$Z=0.25X_1+0.45X_2$ గరిష్ఠం చేయాలి.

ఇప్పుడు ఈ అసమీకరణాల (2), (3) రేఖా చిత్రాలు గీయాలి. షెడెడు ప్రాంతం, సాధనల సమితి అవుతుంది. ఈ ప్రాంతంలోని ప్రతి బిందువు (X_1, X_2) అనుకూల సాధన అవుతుంది. అందువల్ల లక్ష్య ప్రమేయాన్ని గరిష్ఠం కావించటానికి సాధ్యమయిన సాధనను కనుక్కోవాలి. అంటే అనుకూల ప్రాంతంలోని ప్రతి బిందువుకు Z కనుక్కోవాలి. ఇది శ్రమ కాలయాపనతో కూడిన పని. దీనిని అధిగమించటానికి మరియొక పద్ధతిని ఆలోచించాలి.

ఇందుకై లక్ష్య ప్రమేయమైన

$Z=\frac{1}{4}X_1+\frac{9}{20}X_2$ (లేదా)

$Z=0.25X_1+0.45X_2$ కి రేఖా చిత్రాన్ని గీయండి.

అనుకూల ప్రాంతంలోని ప్రతి బిందువు ఒక సాధన అవటం వల్ల ఏదో ఒక స్వచ్ఛంద బిందువును తీసికొని Z విలువను కనుక్కొందాం.

అటువంటి బిందువలలో (40, 400) ఒకటి.

అప్పుడు $Z=0.25\times 40+0.45\times 400$

$=10+18=28$

ఇప్పుడు $Z=0.25X_1+0.45X_2=28$ అగును.

పై రేఖ పైన గల ప్రతి బిందువునకు ఒకే లాభం వస్తుందని గమనించండి. ఈ ధర్మం వలన Z వివిధ విలువలకు లక్ష్యప్రమేయం సూచించే సమాంతర రేఖల వ్యవస్థకు చెందిన ఏ రేఖనైనా తుల్య లాభరేఖ అంటారు.

ఈ రేఖ మూలబిందువు నుంచి దూరం జరిగే కొద్ది Z విలువ హెచ్చుతున్నదని కూడా గమనించండి. అందువలన బహుభుజి ప్రాంతంలో కనీసం ఒక ఉమ్మడి బిందువైనా రేఖకు వుండునట్లు Z విలువలు పెరిగేటట్లు తుల్య లాభరేఖలను మూల బిందువు నుంచి దూరంగా గీయండి. తుల్య లాభరేఖ ఈ స్థానాన్ని (90, 105) శీర్షము దగ్గర పొందునని గమనించండి. అందువలన మూల బిందువు నుంచి దూరమైన స్థానానికి సంగత శీర్షములలో ఒక దాని దగ్గర Z విలువ గరిష్టమగుచున్నదని తీర్మానించవచ్చు.

సాధన ప్రాంతమైన OABC శీర్షాలు (0, 0) (0, 150) (90, 105) (160, 0)

O దగ్గర $Z=0\times0.25+0.45\times0=0$

A దగ్గర $Z=0.25\times0+\frac{9}{20}\times150=67\frac{1}{2}$

B దగ్గర $Z=0.25\times90+0.45\times105=69\frac{3}{4}$

C దగ్గర $Z=0.25\times160+\frac{9}{20}\times0=40$

$X_1=90, X_2=105$ వద్ద గరిష్ట లాభము $69\frac{3}{4}$ వచ్చును.

ఉదాహరణ : 2

ఒక ఉత్పత్తిదారుడు ఒక వస్తువును రెండు మోడళ్ళు A, B లలో తయారు చేస్తాడు. ఈ మోడళ్ళను తయారు చేయడానికి రెండు యంత్రాలను ఉపయోగించవలసి వుంటుంది. A రకపు మోడల్‌ను ఒక దానిని తయారు చేయుటకు రెండు యంత్రాలు I మరియు II లను వరుసగా గం. 1 మరియు గం. 2 ఉపయోగించవలె. ఒక B రకపు మోడళ్ళ తయారీకి రెండు యంత్రాలు I, II లు వరుసగా 4 గంటలు, 2 గంటలు ఉపయోగించవలసి వుంటుంది. సమయంలో యంత్రం I ను రోజుకి 8 గంటల కంటే ఎక్కువ ఉపయోగించడానికి వీలు లేదు. అలాగే యంత్రాన్ని రోజుకి 10 గంటల కంటే ఎక్కువ ఉపయోగించకూడదు. మోడళ్ళు A, B లపై ఒక్కోదానిపై లాభం వరుసగా రూ. 200, రూ. 280లయిన ఆ ఉత్పత్తిదారుడు గరిష్ట లాభాన్ని పొందుటకు రోజుకి ఒక్కో రకపు మోడళ్ళునెన్నింటిని ఉత్పత్తి చేయవలె ?

సాధన : రోజుకి A, B రకపు మోడళ్ళును వరుసగా x, y సంఖ్యలలో ఉత్పత్తి చేయవలెననుకొనుము. అపుడు లక్ష్య ప్రమేయం $Z=200x+280y$ అవుతుంది. A రకపు మోడళ్ళు x, B రకపు మోడళ్ళు y ఉత్పత్తి చేయడానికి మొదటి యంత్రాన్ని $1.x + 4.y$ గంటలు ఉపయోగించవలసి ఉంటుంది. కాని మొదటి యంత్రాన్ని రోజుకి 8 గంటల కంటే ఎక్కువ ఉపయోగించకూడదు కాబట్టి

$$x+4y\le8 \quad \text{----------} \quad (1)$$

అలాగే A, B రకపు మోడళ్ళను x, y సంఖ్యలలో ఉత్పత్తి చేయడానికి రెండో యంత్రంపై అవసరమగు సమయం $2x+2y$ గంటలు. కాని ఈ రెండో యంత్రాన్ని రోజుకి 10 గంటల కంటే ఎక్కువ ఉపయోగించకూడదు, కాబట్టి

$$2x+2y\le10$$

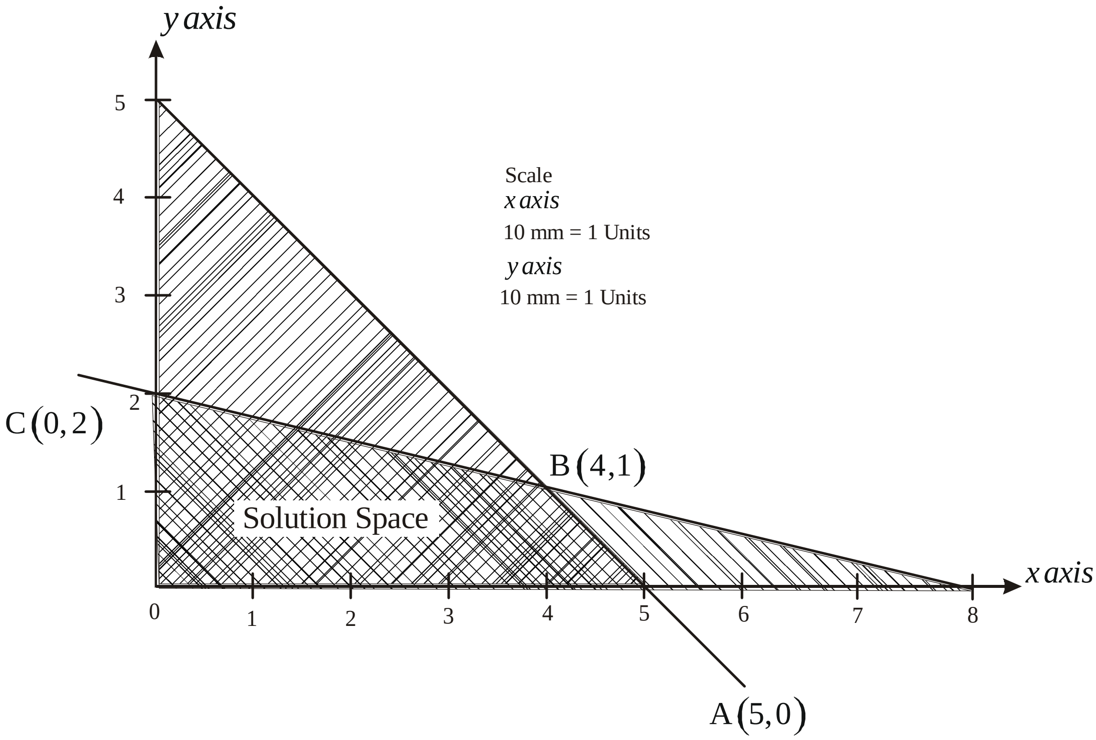
లేదా $$x+y\le5 \quad \text{----------} \quad (2)$$

x, y లు ఋణపూర్ణాంకాలు కాజాలవు. అందువల్ల

$$x\ge0 \quad \text{---------------} \quad (3)$$

$y \geq 0$ --------------- (4)

లాభ ప్రమేయాన్ని గరిష్టం చేయడమే పై సమస్య (1), (2), (3), (4) అసమీకరణాలకనుగుణంగా $Z = 200x + 280y$ గరిష్టం చేయాలి. రేఖీయ అసమీకరణాల వ్యవస్థ (1), (2), (3), (4)లను రేఖాచిత్రంపై చూపండి.



పటం - 2

పై పటంలో షేడ్ చేయడిన భాగం ఒక సాధనల సమితి అవుతుంది. ఈ ప్రదేశంలోని ప్రతి బిందువు రేఖీయ అసమీకరణ వ్యవస్థకొక సాధనమే. ఈ సమితి యొక్క శీర్షాలు $O(0,0)$, $A(5,0), B(4,1)$ మరియు $C(0,2)$లను గమనించండి.

కాబట్టి లక్ష్య ప్రమేయం

$Z = 200x + 280y$ యొక్క గరిష్ట విలువ $B(4,1)$ వద్ద లభిస్తుంది.

నిజానికి $O(0,0)$ వద్ద $P = 0$

$A(5,0)$ వద్ద $P = 200 \times 5 + 280 \times 0 =$ రూ. 1,000

$B(4,1)$ వద్ద $P = 200 \times 4 + 280 \times 1 =$ రూ. 1,080

$C(0,2)$ వద్ద $P = 200 \times 0 + 280 \times 2 =$ రూ. 560

గరిష్ట లాభాన్ని పొందుటకు రోజుకు A రకపు మోడళ్ళను 4, B రకపు మోడళ్ళను 1 ఉత్పత్తి చేయవలెను.

ఉదాహరణ : 3

ఒక ట్రాన్స్‌పోర్టు కంపెనీకి P, Q ల వద్ద రెండు ప్రధాన డిపోలు కలవు. అక్కడ నుంచి మూడు సబ్‌డిపోలయిన A, B, C లకు వాహనములు నడుపబడుతున్నవి. P, Q డిపోల వద్ద వరుసగా 10 మరియు 15 వాహనాలు కలవు. సబ్‌డిపోలయిన A, B, C ల వద్ద అవసరమగు వాహనముల సంఖ్యలు వరుసగా 8, 10, 7 ప్రధాన డిపోలు P, Q ల నుంచి సబ్‌డిపోలు A, B, C ల మధ్య దూరాలు (కి.మీ.లలో) క్రింది పట్టికలో నివ్వబడ్డాయి.

పట్టిక - 1

వరకు / నుండి	A	B	C
P	20	60	40
Q	15	25	80

వాహనములు తిరుగు దూరము కనిష్ఠమయ్యేట్లు P, Q డిపోల నుంచి A, B, C లకు ఏ విధంగా బస్సులను నడపవలెను ?

సాధన : P నుంచి A కి నడపవలసిన వాహనముల సంఖ్య x, మరియు P నుండి B కి నడపవలసిన వాహనాల సంఖ్య y అనుకొంటే, P, Q ల నుండి A, B, C లకు నడపవలసిన వాహనముల సంఖ్యలు క్రింది పట్టికలో చూడు విధంగా వుంటాయి.

పట్టిక - 2

వరకు / నుండి	A	B	C
P	x	y	$10-(x+y)$
Q	$8-x$	$10-y$	$15-[(8-x)+(10-y)]$ $=x+y-3$

P నుంచి A, B లకు x, y సంఖ్య గల వాహనాలు పంపటం వల్ల C కి పంపుటకు P వద్ద మిగిలిన వాహనాల సంఖ్య $10-(x+y)$.

అంతే కాకుండా Q నుంచి A, B లకు పంపిన వాహనముల సంఖ్యలు $8-x$, $10-y$ కావున C కి పంపుటకు Q వద్ద మిగిలిన వాహనాల సంఖ్య $15-[(8-x)+(10-y)]$

$$=x+y-3$$

వీటి నుంచి మనం గమనించేదేమిటంటే,

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0,\ y\geq 0,\ 8-x\geq 0,\ 10-y\geq 0 \\ 10-(x+y)\geq 0,\ x+y-3\geq 0 \end{array}\right\} ------(1)$$

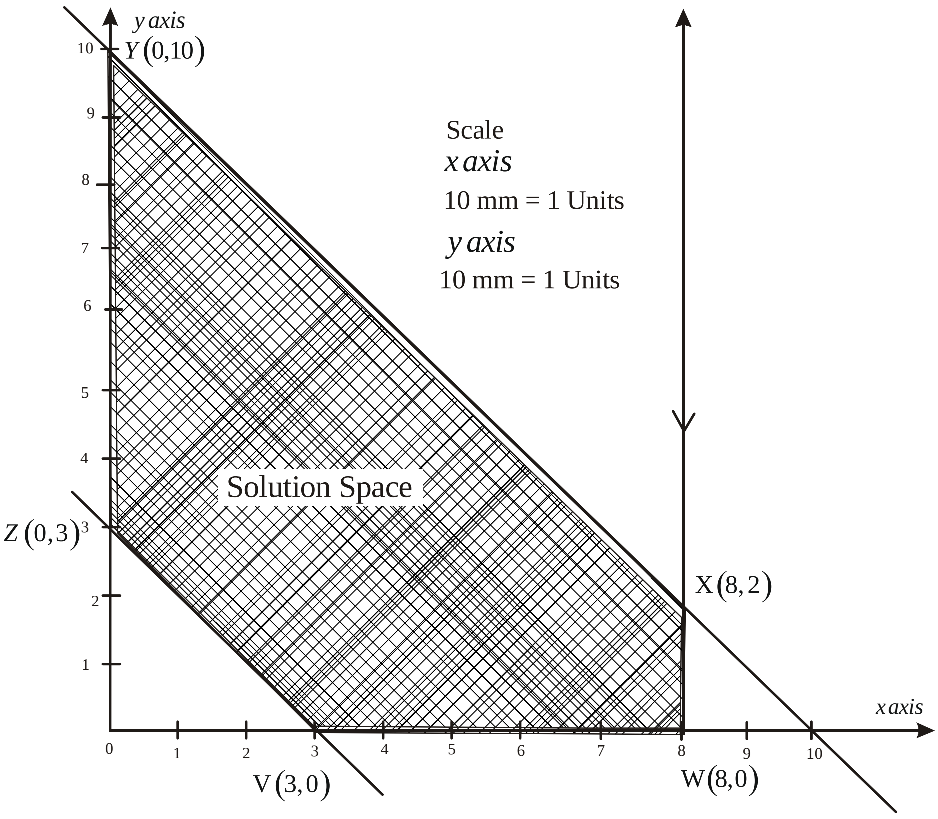
వాహనములు తిరుగు మొత్తం దూరం (P, Q ల నుంచి A, B, C లకు)

$$Z = 20x + 60y + 40\big(10-(x+y)\big) + 15(8-x) + 25(10-y) + 80(x+y-3)$$

$$= 45x + 75y + 350$$

అనగా (1)లోని నియమాలకు లోబడి Z ను కనిష్ఠం చేయడమే మన ఏకఘాత ప్రణాళిక సమస్య.

వ్యవస్థ (1)ను రేఖా చిత్రంలో చూపండి.



పటం - 3

పై పటం నుంచి గమనించేదేమిటంటే షేడ్ చేయబడిన భాగం $V(3,0), W(8,0), X(8,2), Y(0,10), Z(0,3)$లు శీర్షాలుగా గల సమితి ప్రాంతం అవుతుంది.

వీటిలో $V(3,0)$ వద్ద Z విలువ కనిష్ఠం అని గమనించండి. (అదెలాగో సరిచూడండి)

$x=3, y=0$ లను పట్టిక 2లో నుంచగా P,Q డిపోల నుంచి ఏ సంఖ్యల్లో వాహనాలు A,B,C లకు నడపడం వల్ల వాహనాలు తిరుగుదూరం కనిష్ఠమవుతుందో తెలుస్తుంది.

పట్టిక - 3

వరకు / నుంచి	A	B	C
P	3	0	7
Q	5	10	0

ఉదాహరణ : 4

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ --------- (1)

$x_1 + 2x_2 \ \geq 2$ --------- (2)

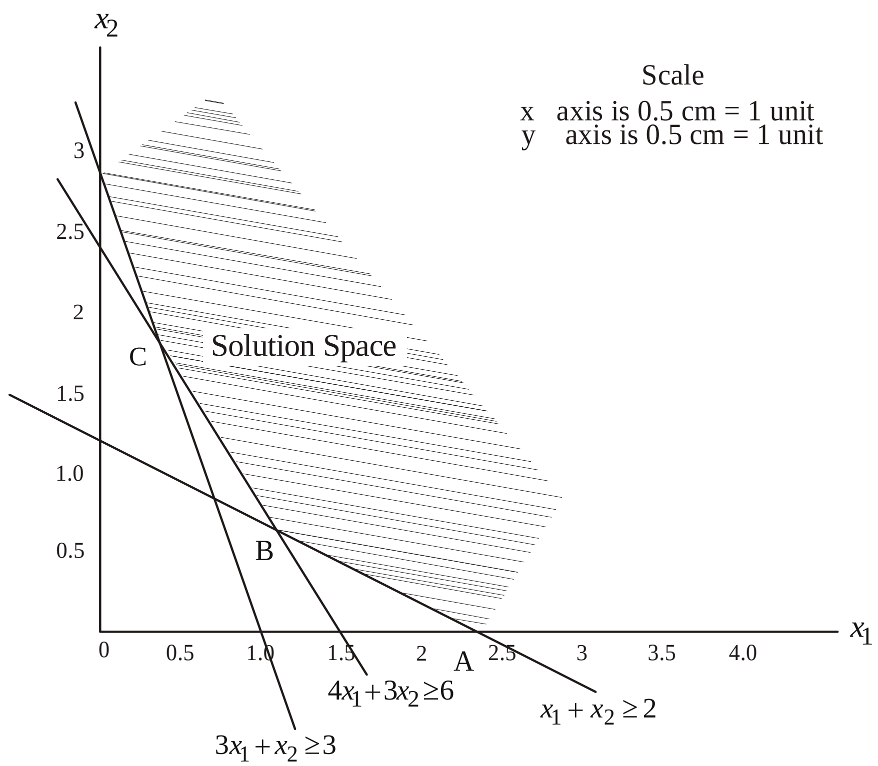
$3x_1 + x_2 \geq 3$ --------- (3)

$4x_1 + 3x_2 \geq 4$ --------- (4) నియమాలను

పాటిస్తూ లక్ష్య ప్రమేయం $Z = 4x_1 + 2x_2$ కనిష్టంగా వుండేటట్లు x_1, x_2 ల విలువలను కనుక్కోవాలి.

సాధన : సమస్యలోని నియమాలు (1), (2), (3), (4)లను రేఖా చిత్రంలో (పటం 2) చూపిస్తే

సాధన సమితి శీర్షాలు $\mathrm{A} = (2,0)$, $\mathrm{B} = (1,2,0,4)$, $\mathrm{C} = (0.6, 1.2)$ $\mathrm{D} = (0,3)$



పటం - 4

A దగ్గర $Z=4x_2+2\times 0=8$

B దగ్గర $Z=4\times 1.2+2\times 0.4=5.6$

C దగ్గర $Z=4\times 0.6+2\times 1.2=4.8$

D దగ్గర $Z=4\times 0+2\times 3=6$

$\therefore Z$ ను కనిష్టం చేసే సాధన $x_1=0.6,\ x_2=0.4$

కనిష్ట Z విలువ **= 4.8**

ఉదాహరణ : 5

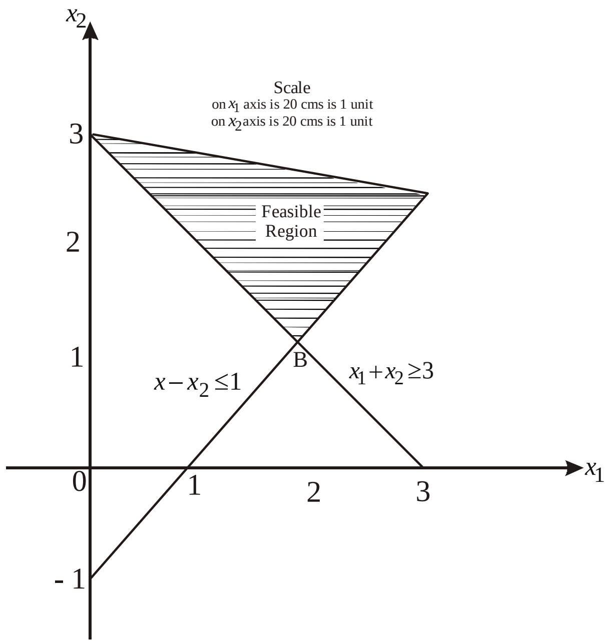
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$ ----------- (1)

$x_1-x_2\leq 1$ ----------- (2)

$x_1+x_2\geq 3$ ----------- (3) నియమాలను

పాటిస్తూ లక్ష్య ప్రమేయం $Z=3x_1+2x_2$ను గరిష్టంగా వుండేటట్లు x_1, x_2 విలువలను కనుక్కోండి.

సాధన : సమస్యలోని నియమాలు (1), (2), (3)లను రేఖా చిత్రంలో (పటం 3) చూపిస్తే సాధన సమితి శీర్షాలు $A=(0,3),\ B=(2,1)$



పటం - 5

A దగ్గర $Z=3\times0+2\times3=6$

B దగ్గర $Z = 3\times 2 + 2\times 1 = 8$

కాని మరో బిందువు (10, 10) అన్ని నియమాలను సంతృప్తి పరుస్తూ కుంభాకార క్షేత్రంలో ఉన్నది. దానితో లక్ష్య ప్రమేయం విలువ $50(Z=50)$. ఈ విలువ 8 కంటే ఎక్కువ. కాబట్టి ఈ సమస్యకు లక్ష్య ప్రమేయం గరిష్ట విలువ అనంత బిందువుల దగ్గర ఉంది. కనుక ఈ సమస్య అపరిబద్ధ సాధనను కలిగి వుంది.

ఉదాహరణ : 6

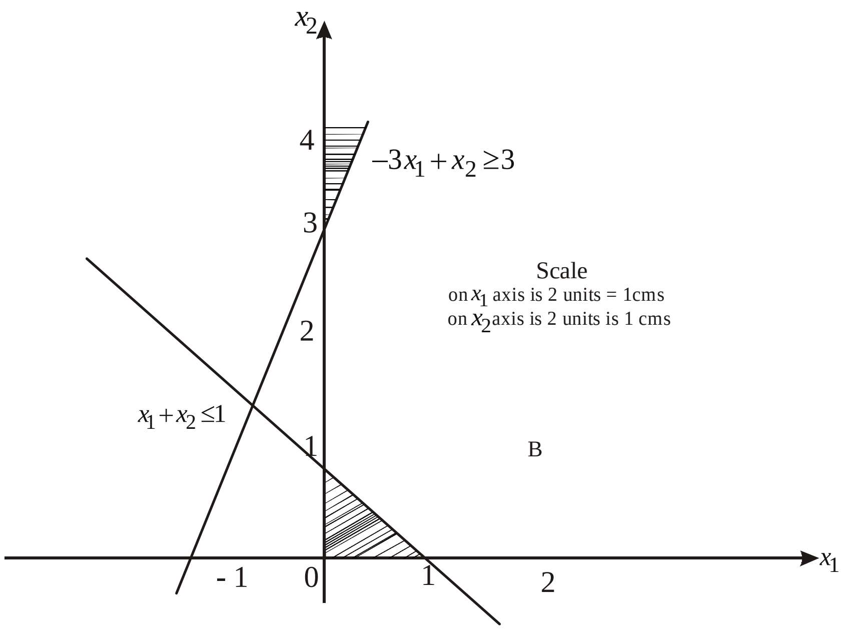
$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0$ ----------- (1)

$x_1+x_2\leq 1$ ----------- (2)

$-3x_1+x_2\geq 3$ ----------- (3) నియమాలను

పాటిస్తూ లక్ష్య ప్రమేయం $Z=x_1+x_2$ ను గరిష్టం చేయడానికి x_1, x_2 విలువలను కనుక్కోండి.

సాధన : సమస్యలోని నియమాలు (1), (2), (3)లను రేఖా చిత్రంలో చూపించగా (పటం - 4) సాధన సమితి శీర్షాలు ఈ సమస్యకు లేవు. ఏ ఒక్క బిందువు ఈ అన్ని నియమాలను సంతృప్తి పరచలేవు. కాబట్టి ఇచ్చిన సమస్యకు ఆచరణీయ సాధన లేదు.



పటం - 6

ఉదాహరణ : 7

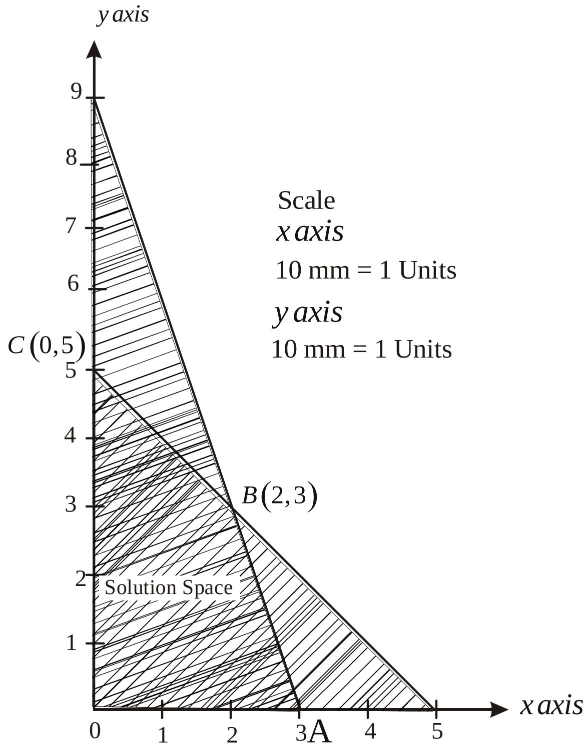
$x \geq 0,\ y \geq 0$ ----------- (1)

$3x + y \leq 9$ ----------- (2)

$x + y \leq 5$ ----------- (3) నియమాలను

పాటిస్తూ లక్ష్య ప్రమేయం $Z = 2x + 3y$ ను గరిష్టం చేయండి.

సాధన : సమస్యలోని నియమాలు (1), (2), (3)లను రేఖా చిత్రంలో చూస్తే సాధన సమితి శీర్షాలు $A(3,0), B(2,3), C(0,5), O(0,0)$



పటము - 7

లక్ష్య ప్రమేయం $Z = 2x + 3y$ యొక్క గరిష్ట విలువ ఈ శీర్షాలలో లభిస్తుంది.

A దగ్గర $Z = 2 \times 3 + 3 \times 0 = 6$

B దగ్గర $Z = 2 \times 2 + 3 \times 3 = 13$

C దగ్గర $Z = 2 \times 0 + 3 \times 5 = 15$

O దగ్గర $Z = 2 \times 0 + 3 \times 0 = 0$

అనగా Z యొక్క గరిష్ట విలువ 15, శీర్షం (0, 5) వద్ద లభిస్తున్నది.

ఉదాహరణ : 8

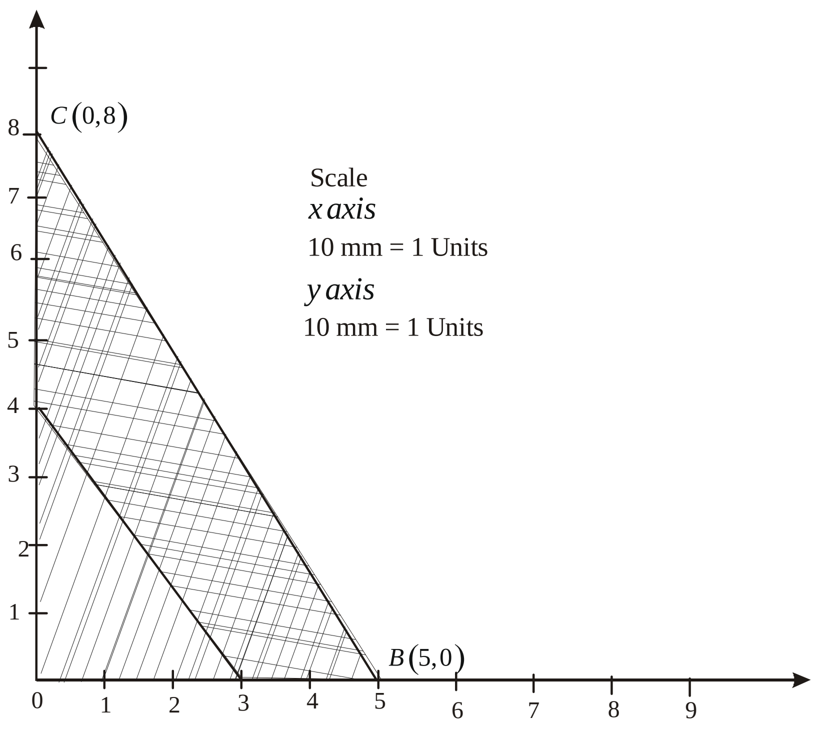
$8x + 5y \le 40$ ----------- (1)

$4x + 3y \ge 12$ ----------- (2)

$x \ge 0$ ------------ (3)

$y \ge 0$ ------------ (4) నియమాలకు లోబడి $Z = x + 4y$ ను గరిష్టం చేయండి.

సాధన : (1) యొక్క సాధన రేఖా చిత్రంలో చూపండి.



పటము - 8

వ్యవస్థ (1) యొక్క సాధన సమితి ABCD, $A(3,0)$, $B(5,0)$, $C(0,8)$ మరియు $D(0,4)$ లు.

కావున $Z = x + 4y$ యొక్క గరిష్ట విలువ 32, $C(0,8)$ వద్ద లభిసుస్తన్నది. ఇదే సమస్యని సాధారణ పద్ధతిని మరో విధంగా సాధించవచ్చు. పై పటంలో చూపిన ప్రదేశం (1) సాధనం. ఇందులోని ప్రతి బిందువు లక్ష్య ప్రమేయానికి ఒక అనుకూల సాధనమునిస్తుంది. వీటిలో ఏ బిందువు వద్ద మన లక్ష్య ప్రమేయానికి గరిష్ఠ విలువ ఉంటుందో కనుగొనవలె.

అనగా ఈ అనుకూల ప్రాంతం (1) యొక్క సాధన సమితిలోని ప్రతి బిందువు వద్ద f విలువ కనుగొనవలెను కాని ఇలా చేయడం శ్రమతో కూడుకున్నదే, కాక కాలయాపన కూడా. మరోలా ఈ స్థితి నుంచి బయటపడటంకు ఒక దారి కలదు. అదేమంటే అనుకూల ప్రాంతంలోని ప్రతి బిందువు మన ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యకి ఒక సాధనమన్పిస్తుంది. ఈ ప్రాంతంలో ఒక బిందువు, ఉదాహరణ $C(3,1)$గైకొని Z విలువను కనుగొనుము. ఈ బిందువు వద్ద Z విలువ **3 + 4.1 = 7.**

$x+4y=7 \rightarrow (2)$ ను గైకొనుము. ఈ శ్రేడిని అనుకూల ప్రాంతానికి చెందిన ప్రతి బిందువు వద్ద Z విలువ ఒకటే అది **7** లక్ష్య ప్రమేయంచే నిర్ధారితమయింది. ఈ సమాంతర రేఖలనే తుల్యలాభరేఖలు అంటారు. అంతేకాక ఈ రేఖల మూల బిందువు నుంచి దూరం జరిగిన కొలది లక్ష్య ప్రమేయాలను జరుపుతూ అనుకూల ప్రాంతంలోని కనీసం ఒక బిందువునైన ఆ తుల్య లాభ రేఖపై ఉండేటట్లు పోవలె. ప్రస్తుత సమస్యకు సంబంధించినంత వరకు తుల్య లాభరేఖ $C(0,8)$ వద్ద లభిస్తుంది.

కావున మన సమస్యకు **2** యొక్క గరిష్ఠ విలువ $Z=x+4y \Rightarrow 0+4.8=32$. $C(0,8)$ వద్ద లభిస్తున్నది. ఈ సమస్యలో వాడిన పద్ధతిని క్రింద వివరించటమైనది.

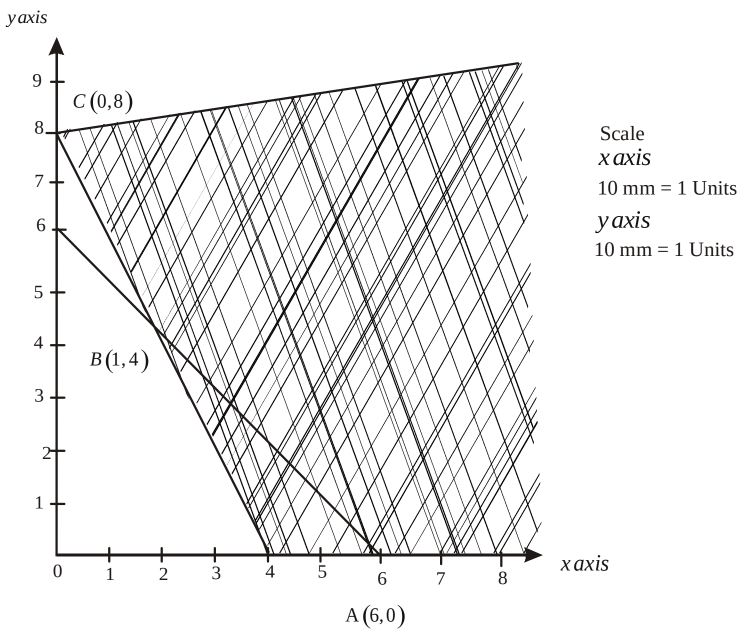
ఉదాహరణ : 9

$x+y \geq 6$ ----------- **(1)**

$2x+y \geq 8$ ----------- **(2)**

$x \geq 0,\ \ y \geq 0$ ----------- **(3)** నియమాలకు లోబడి $Z=4x+y$ ను కనిష్టం చేయండి.

సాధన : వ్యవస్థ 111ను రేఖాచిత్రంలో చూపండి.



పటము - 9

పై పటములో షేడ్ చేయబడిన భాగం ఒక బిందువు (భుజం $A(6,0)$) 4.5ను ఉపయోగించి వున్న విలువలు ఎలాగు $4x+y=a$ తుల్య లాభ రేఖను మూలబిందువుకు దగ్గరగా జరుపుతూ పోతే $4x+y=8$ అనే తుల్య లాభరేఖ మూలబిందువు అత్యంత దగ్గరగా ఉంటూ కుంభాకార సమితిలో ఏకైక ఉమ్మడి బిందువు. $C(10,8)$ను కలిగి వుంటుంది. అందువల్ల $Z=4x+y$ యొక్క కనిష్ట విలువకి, $C(10,8)$ వద్ద కల్గి వుంటుంది.

17.3 అభ్యాసము :

1. ఒక ఉత్పత్తిదారుని వద్ద 75 కి.గ్రా. మామిడి, 120 కి.గ్రా. వేరుశనగ గింజలు కలవు. వీనిని 1 కి.గ్రా సంచుల మిశ్రమము చేయు విధానము ఈ విధంగా వుంది. : తక్కువ రకం మిశ్రమ మందు 250 గ్రా మామిడి, 750 గ్రా వేరుశనగ కాయలుంటాయి. కాగా మేలు రకం మిశ్రమమందు 500 గ్రా మామిడి, 500 గ్రా వేరుశనగ గింజలుంటాయి. తక్కువ రకం మిశ్రమంపై సంచికి 5 రూపాయలు లాభం, మేలు రకం మిశ్రమం పై సంచికి 10 రూపాయల లాభం వచ్చేట్లయితే గరిష్ఠ లాభం పొందుటకు ఒక్కో రకం సంచులెన్ని తయారు చేయవలె ?

2. ఒక దుకాణదారు రెండు విభిన్న రంగుల్లో పంజాబీ డ్రస్సులు 30 కంటే ఎక్కువ అమ్మలేడు. ఆకుపచ్చ పంజాబీ డ్రస్సుల అమ్మకాలు కనీసం రెట్టింపు తెల్ల పంజాబీ డ్రస్సులను అమ్మును. ప్రతి తెల్ల పంజాబీ డ్రస్సు పై లాభం 30 రూ. కాగా ప్రతి ఆకుపచ్చ పంజాబీ డ్రస్సుపై లాభం 35రూ. అయితే గరిష్ఠ లాభం పొందుటకు ఒక్కో రకపు పంజాబీ డ్రస్సులను ఎన్నింటిని అమ్మవలెను.

3. ఒక మిఠాయి కొట్టువాడు రెండు రకాల మిఠాయిలు బాసుంది, కలాకాండలను 7 కి.గ్రా. సంచులలో మిశ్రమము చేయు విధానం ఈ విధంగా వుంది. బాసుంది రకం కనీసం 3 కి.గ్రా.లుండేటట్లు, కలాకాండ రకం 5 కి.గ్రా.ల కంటే ఎక్కువ కాకుండా కలపవలె. బాసుంది రకం మిఠాయిపై ప్రతి కి.గ్రా.కు 15 రూ. లాభం, కలాకాండ రకం మిఠాయిపై ప్రతి కి.గ్రా.కు 20 రూ. లాభం పొందేట్లయి గరిష్ఠ లాభం పొందుటకుగాను ప్రతి 7 కి.గ్రా. సంచిలో ఏ రకం మిఠాయి ఎన్ని కి.గ్రా.లుండవలెను ?

4. $Z=3x+2y$ ను క్రింది పరిమితులకు లోబడి గరిష్ఠం చేయండి.

$$5x+8y\le 40$$

$$5x+4y\le 30$$

$$x\ge 0$$

$$y\ge 0$$

5. క్రింది నియమాల దృష్ట్యా $Z=3x+y$ ను గరిష్టం చేయండి.

$$8x+5y\le 40$$

$$4x+3y\ge 12$$

$$x\ge 0$$

$$y\ge 0$$

6. క్రింది నియమాల దృష్ట్యా $Z = x + y$ ను కనిష్టం చేయండి.

$$x + y \geq 6$$

$$2x + y \geq 8$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

7. క్రింది నియమాలకు లోబడి $Z = (x - y)$ యొక్క గరిష్ఠ, కనిష్ఠ విలువలను కనుగొనుము.

$$2x - y \geq 2$$

$$x - 2y \geq 2$$

$$x + y \leq 5$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

8. $Z = 4x + 3y$ ను క్రింది పరిమితులకు లోబడి కనిష్ఠం చేయండి.

$$x + y \leq 8000$$

$$2x + y \leq 1000$$

$$0 \leq x \leq 400$$

$$0 \leq y \leq 700$$

రచయుత

డా॥ కె. చందన్

పాఠం 18

సింప్లెక్స్ పద్ధతి

ఉద్దేశ్యం

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలను తెలుసుకోగలరు.

* సింప్లెక్ పద్ధతి ఆవశ్యకతలు, అల్‌గారిథమ్ మరియు ధర్మాలను గురించి అన్ని వివరాలు తెలుసుకోవచ్చు.

పాఠ్య నిర్మాణ క్రమం

18.1 సింప్లెక్స్ పద్ధతి వివరణ :

రెండు చలరాశులలో ఉత్పన్నమయ్యే ఏకఘాతాత్మక ప్రణాళిక సమస్యలను సాధించటానికి రేఖా చిత్ర పద్ధతి ఉపయోగపడుతుంది. కాని రెండు కన్నా ఎక్కువ చలరాశులలో ఉత్పన్నమయ్యే ఏకఘాతాత్మక ప్రణాళిక సమస్యలను సాధించటానికి రేఖాచిత్ర పద్ధతి ఉపయోగించటం కష్టం. ఎందుకనగా రెండు కన్నా ఎక్కువ చలరాశులు ఉన్నప్పుడు సమస్య రెండు కన్నా ఎక్కువ పరిమాణం కలది కాబట్టి గ్రాఫ్ పేపరుపై చిత్రాల్ని గీయటం కష్టం. కనుక చలరాశులు ఎన్ని ఉన్నప్పటికీ ఏకఘాతాత్మక ప్రణాళికా సమస్యలను సాధించటానికి సింప్లెక్స్ పద్ధతి ద్వారా అభిలషణీయమైన సమాధానాలను పొందవచ్చు. ఈ సింప్లెక్స్ పద్ధతిని జార్జి. బి డాంటేజిగ్ 1947లో అభివృద్ధి చేశారు. ఈ పద్ధతి ద్వారా పరిమితి పునరుక్తలలో సమస్యలకు సమాధానం వస్తుంది. ఏకఘాతాత్మక ప్రణాళికా సమస్యలను సింప్లెక్స్ పద్ధతిలో సులభంగా సాధించవచ్చు.

అసమీకరణాల సమితి సాధన బహుభుజి సమితి అవుతుందని ఇది వరకే రేఖాచిత్ర పద్ధతి ఉదాహరణలో తెలుసుకున్నాం. ఈ బహుభుజికి పరిమితమైన శీర్షాలు వుంటాయి. కాబట్టి ఏకఘాతాత్మక ప్రణాళికా సమస్యకు ఒకే ఒక సాధన వున్నచో అది బహుభుజి ప్రాంత శీర్షాలలో ఏదో ఒక దాని దగ్గర వుంటుంది. ఆ సమస్యకు అనేక సాధనలు వుంటే అందులో కనీసం ఒక్కటైనా బహుభుజి ప్రాంత శీర్షం దగ్గర వుంటుంది.

ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యలో వచ్చే ఆధార ఆచరణీయ సాధనాలను కుంభాకార బహుభుజి శీర్షాలు సూచిస్తాయి. క్రమ పద్ధతిలో ఒక ఆధార ఆచరణీయ సాధనం నుంచి విలువలో తక్కువగాని మరొక ఆధార ఆచరణీయ సాధనానికి వెళ్ళటానికి ఈ సింప్లెక్స్ పద్ధతి ఒక అల్‌గారిథమ్ ఇస్తుంది. ఆధార ఆచరణీయ సాధనాలు పరిమితం కాబట్టి పరిమిత పునరుక్తులలో పరిబద్ధ సాధనను సింప్లెక్స్ పద్ధతిద్వారా కనుక్కోవచ్చు.

సమస్యలో పరిబద్ధసాధన లేకపోతే అపరిబద్ధ సాధన వుంటుందని సూచిస్తుంది.

18.2 సింప్లెక్స్ పట్టిక సాంకేతికాలు :

C_B	Y_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3.......	Y_n
C_{B_1}	Y_{B_1}	X_{B_1}	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{1n}
C_{B_2}	Y_{B_2}	X_{B_2}	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{2n}
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-
C_{B_n}	Y_{B_n}	X_{B_n}	Y_{m1}	Y_{m2}	Y_{m3}	Y_{mn}
		Z_0	Z_1-C_1	Z_2-C_2	Z_3-C_3	Z_n-C_n

ఇక్కడ

C_B : లక్ష్య ప్రమేయములోని ఆధార చలరాశుల మూల్యాల వరుస

Y_B : ఆధార చలరాశులకు అనురూప సదిశల దొంతి

X_B : ఆధార ఆచరణీయ విలువల దొంతి

Y_i : సమీకరణంలోని చలరాశి యొక్క గుణకాల దొంతి

Z_i : $C_B\,Y_i,\ i=1,2,....,n$

Z_i-C_i: $C_B\,Y_i-C_i, i=1,2,....,n$

B : ఏకఘాతాత్మక స్వతంత్ర దొంతులలో ఏర్పడిన సాధారణ ఆధార ఉపమాత్రిక

18.3 సింప్లెక్స్ పద్ధతి ఆవశ్యకతలు :

1. సాధించవలసిన సమస్య నిర్ధిష్ట రూపంలో ఉండాలి.
2. సమస్యలోని చలరాశుల సంఖ్య నియమాల సంఖ్య కంటే ఎక్కువగా ఉండాలి.

3. నియమాలలో కుడివైపు వున్న స్థిరరాశులన్నీ ఋణేతరాలై వుండాలి.

4. ప్రతి సమీకరణంలో ఒక వేరే చలరాశి వుండి దాని గుణకం సమీకరణంలో ఒకటి వుండి మిగతా సమీకరణాలలో సున్న కావాలి.

18.4 సింప్లెక్స్ అల్‌గారిథమ్ :

సింప్లెక్స్ పద్ధతిలో ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యలకు సాధన ఉండునని ఊహించుకోవాలి. అభిలషణీయమైన సమాధానము పొందుటకు ఈ క్రమపద్ధతిని ఉపయోగిస్తారు.

మొదటి మెట్టు : లక్ష్య ప్రమేయము గరిష్ఠీకరణకు చెందినది లేదా కనిష్ఠీకరణకు చెందినదా చూసుకోవాలి. ఇచ్చిన సమస్య యొక్క లక్ష్య ప్రమేయము కనిష్ఠీకరణకు చెందినది అయితే, ఆ లక్ష్య ప్రమేయమునకు గరిష్ఠీకరణకు చెందుటకు దిగువ చూపించిన విధంగా మార్చవలె.

కనిష్ఠీకరణ Z = గరిష్ఠీకరణ $(-Z)$

Z యొక్క కనిష్ఠీకరణ = $(1-Z)$ యొక్క గరిష్ఠీకరణ

రెండవ మెట్టు : అన్ని $bi(i=1,2,....m)$లు ఋణేతర సంఖ్యలు అయితే మూడవ మెట్టుకు వెళ్ళవలె లేదా ఏదైనా biలు ఋణాత్మక సంఖ్యలుగా వుంటే ఆ సమీకరణములను (+) చే గుణించిన biలు ఋణేతర సంఖ్యలుగా మారును.

మూడవ మెట్టు : అన్ని అసమీకరణ రూపంలో ఉన్న నియమాలను Slack / Surplus చలరాశులను ఉపయోగించి, సమీకరణంలోకి మార్చవలెను. ఈ Slack / Surplus చలరాశుల మూల్య గుణకములను శూన్య విలువలుగా పరిగణించవలెను.

నాల్గవ మెట్టు : ఇచ్చిన సమస్యకు తొలి ఆచరణీయ సాధనమును కనుక్కోవలెను. అది $X_B = B^{-1}b, C_B, Y_B, X_B, C_i$ విలువలను సింప్లెక్స్ పట్టికలో వ్రాయవలె.

ఐదవ మెట్టు : నికర విలువలు $Z_i - C_i\,(i=1,2,...n)$లను దిగువ చూపిన ప్రకారం లెక్క కట్టవలె.

$$Z_i - C_i = C_B Y_i - C_i$$

$Z_i - C_i$ యొక్క గుర్తుకు పరీక్షించవలె.

(ఎ) $Z_i - C_i \geq 0$ అయితే తొలి ఆధార ఆచరణీయ సాధనము Y_B ఒక అభిలషణీయమైన ఆధార ఆచరణీయ సాధనము అగును.

(బి) $(Z_i - C_i)$లో ఏ ఒక్కటి (<0) ఋణసంఖ్య అయినా ఆరవ మెట్టుకు వెళ్ళవలెను.

ఆరవ మెట్టు : $(Z_i - C_i)$లలో ఒకటి కన్నా ఎక్కువ ఋణసంఖ్యలు వుంటే కనిష్ఠ సంఖ్యను ఎన్నుకోవాలి. కనిష్ఠ సంఖ్య రెండు

(లేదా ఎక్కువ) సార్లు వస్తే, ఏదైనా ఒకటి ఎన్నుకోవాలి. అది $(Z_r - C_r)$, $(i=r)$అనుకుందాం. ఈ సంఖ్య వుండే దొంతిని కీలక దొంతి అంటాము (Pivotal Column).

(ఎ) ఈ కీలక దొంతిలో అన్ని $Y_{ir} \leq 0(i=1,....m)$ ఉండిన ఇచ్చిన సమస్యకు అపరిబద్ధం (unbounded) గల సమాధానం ఉంటుంది.

(బి) ఈ కీలక దొంతిలో ఒకటైన $Y_{ir} \geq 0\ (i=1,....m)$ఉన్నదాని అనుబంధ సదిశ Y_r, Y_n ఆధారంలోకి వెడుతుంది.

ఏడవ మెట్టు : $\dfrac{X_{Bi}}{Y_{ir}}$, $Y_{ir} > 0(i=1,2,....m)$ నిష్పత్తులను గణన చేసి అందులో కనిష్ట విలువలను ఎన్నుకుంటే ఆ నిష్పత్తి విలువ $\dfrac{X_{BK}}{Y_{Kr}}$ అని అనుకొందాం. అప్పుడు Y_B ఆధారం నుంచి Y_K తొలగిపోతుంది. అప్పుడు ఆ మూలకం Y_{Kr}, K^{th} వరుసను కీలక వరుస అని (Pivotal row), r^{th} దొంతిని కీలక దొంతి (Pivotal column)అని అనండి. గుర్తుగా వుండటానికి కీలక మూలకం చుట్టూ సున్న చుట్టండి.

ఎనిమిదవ మెట్టు : క్రింద ఇచ్చిన సంబంధములను ఉపయోగించి కీలక మూలకాన్ని 1 గానూ, ఆ దొంతిలో వున్న మిగతా మూలకాలను సున్నగా వచ్చేటట్లు చేయాలి.

$$\widehat{Y}_{ii} = Y_{ii} - \frac{Y_{Ki}}{Y_{Kr}}, \qquad i=1,2,....,m+1 \qquad i \neq k$$

$$\widehat{Y}_{Ki} = \frac{Y_{Ki}}{Y_{Kr}}, \quad i=0,1,....,n$$

తొమ్మిదవ మెట్టు : ఐదో మెట్టుకు వెళ్ళి సమస్యకు అభిలషణీయమైన సమాధానము లేదా అపరిబద్ధ సాధనము వచ్చేంత వరకు ఈ పద్ధతి పునరావృతం చేయాలి.

18.5 సింప్లెక్స్ పద్ధతి ధర్మాలు :

సింప్లెక్స్ పద్ధతి ముఖ్యమైన ధర్మాలు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి.

1. లక్ష్య ప్రమేయం గరిష్టీకరణం చేయటానికి సింప్లెక్స్ పద్ధతిలో ఒక ఆధార ఆచరణీయ సాధన దగ్గర మొదలుపెట్టి లక్ష్య ప్రమేయం విలువ తగ్గకుండా పక్కనే వున్న మరొక ఆధార అభిలషణీయ సాధనకు చేరుతుంది. అటువంటి సాధన లేకపోయిన ఆ సమస్యకు లభిలషణీయ సాధన వచ్చినట్లే అంటే ఆధారంలో లేని చలరాశులకు అనుగుణంగా నికర గణనలు ఋణేతరాలు అయితే అభిలషణీయ సాధన వచ్చినట్లే.

2. ఇచ్చిన సమస్య అభిలషణీయ సాదన వచ్చినప్పుడు అన్ని అదనపు చలరాశులు శూన్య విలువలు కలిగిన లక్ష్య ప్రమేయం అభిలషణీయం చేసే చలరాశుల విలువలకు ఇచ్చిన సమస్యలోని నియమాలలో ఖచ్చితంగా “సమానతలు” ఉంటాయి. (Strict equalities).

3. అభిలషణీయ సాధన వచ్చినప్పుడు చివర సింప్లెక్స్ పట్టికలోని ఆధారంలో లేని సదిశలకు అనుగుణంగా నికర గణనలు శూన్యాలు అయితే సమస్యకు, అనేక అభిలషణీయ సాధనాలు వుంటాయి. వాస్తవంగా అనంత అభిలషణీయ సాధనాలు ఉంటాయి. సింప్లెక్స్ పద్ధతి వీటిలో ఒకదానిని కనుగొని ఆగిపోతుంది.

4. ఆధారంలో నుంచి తొలగింపబడే చలరాశిని ఎన్నుకోవటంలో

(ఎ) రెండు కాని అంతకంటే ఎక్కువ నిష్పత్తులు కనిష్టమైన ఏదో ఒక దానిని ఎన్నుకోవచ్చు. సహజంగా తక్కువ పాద సంకేతం గల చలరాశిని తీసుకుంటారు.

(బి) ధనాత్మక నిష్పత్తి ఒకటి కూడా లేకపోతే ఇచ్చిన సమస్యలోని లక్ష్య ప్రమేయం నియమాలతో పరిబద్ధం కాదు. కాబట్టి ఆ సమస్యకు పరిమిత లభిలషణీయ లక్ష్య ప్రమేయం ఉండదు.

(సి) ఒక ఆధారంలో ఉన్న చలరాశి విలువ శూన్యమైతే దానిని కొరత గల ఆధారం అని అంటారు.

(డి) సమస్యలను సాధించటం చక్రీయత రావటం సాధ్యమైనప్పటికీ ఇంతవరకు పరిశీలించిన సమస్యలలో సింప్లెక్స్ పద్ధతి అభిసరణం కానివి మనం చర్చించలేదు.

గమనిక : పైన వివరించిన పద్ధతి సైద్ధాంతిక పరంగా అవగాహనకు క్లిష్టమైనప్పటికీ, ఒక ఉదాహరణను ఈ పద్ధతి ద్వారా సాధిస్తే సులభంగా అర్థమవుతుంది.

ఉదాహరణ : 1

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3,$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 2$ అవుతూ

$x_1 + x_2 + 3x_3$ ని గరిష్టీకరించే సమస్యను సాధించండి.

సాధన : ఈ సమస్యలో లక్ష్య ప్రమేయం గరిష్టీకరణకు చెందింది. నియమాలలోని b_i లు అన్ని ఋణేతర సంఖ్యలు కాబట్టి ఈ అసమీకరణాలను x_4, x_5 తరగు చలరాశులను ఉపయోగించి సమీకరణాలుగా కింద చూపించి విధంగా మార్చాలి.

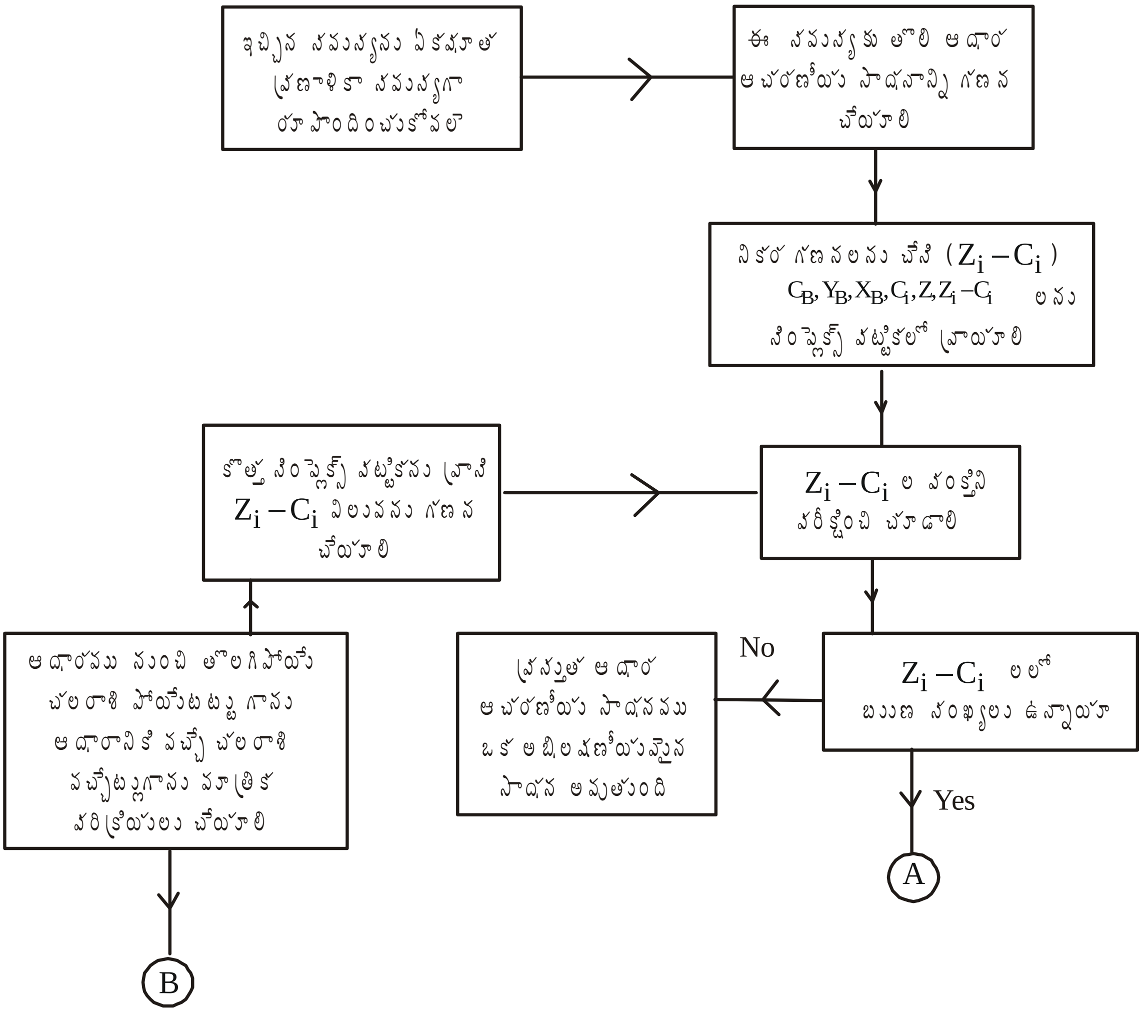
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

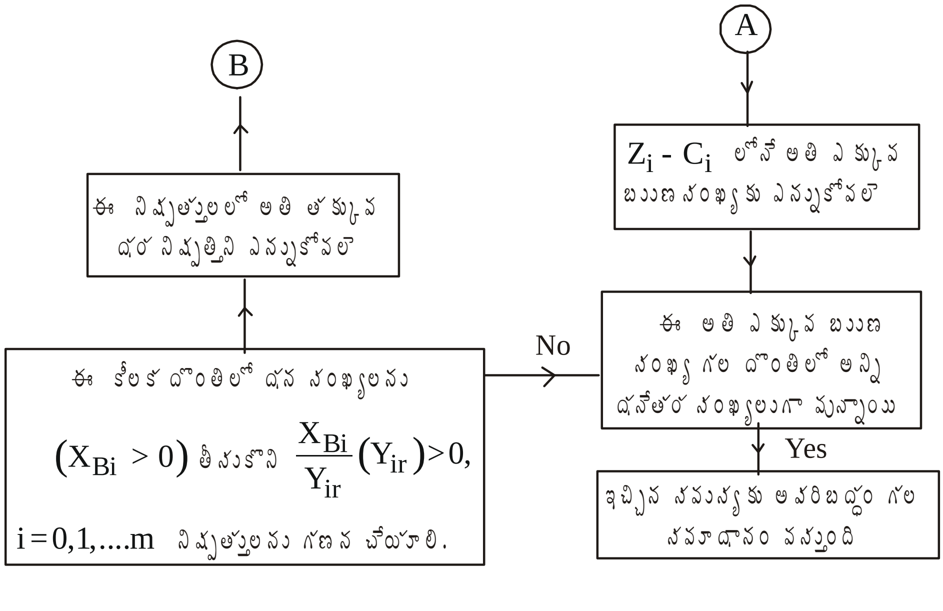
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 2$$

ఇప్పుడు లక్ష్య ప్రమేయం $x_1 + x_2 + 3x_3 + 0.x_4 + 0.x_5$

ఇక్కడ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

పై రెండు సమీకరణాలను $Ax = b$ రూపంలో వ్రాయాలి.


ఇచ్చిన సమస్యను ఏకఘాత ప్రణాళికా సమస్యగా రూపొందించుకోవాలి
ఈ సమస్యకు తొలి ఆధార ఆచరణీయ సాధనాన్ని గణన చేయాలి
నికర గణనలను చేసి $(Z_i - C_i)$ $C_B, Y_B, X_B, C_i, Z, Z_i - C_i$ లను సింప్లెక్స్ పట్టికలో వ్రాయాలి
$Z_i - C_i$ ల పంక్తిని పరీక్షించి చూడాలి
కొత్త సింప్లెక్స్ పట్టికను వ్రాసి $Z_i - C_i$ విలువను గణన చేయాలి
$Z_i - C_i$ లలో ఋణ సంఖ్యలు ఉన్నాయా
No
ప్రస్తుత ఆధార ఆచరణీయ సాధనము ఒక అభిలషణీయమైన సాధన అవుతుంది
Yes
A
ఆధారము నుంచి తొలగిపోయే చలరాశి పోయేటట్లు గాను ఆధారానికి వచ్చే చలరాశి వచ్చేటట్లుగాను మాత్రిక పరిక్రియలు చేయాలి
B


A
B
Z_i - C_i లోనే అతి ఎక్కువ ఋణ సంఖ్యకు ఎన్నుకోవాలి
ఈ నిష్పత్తులలో అతి తక్కువ ధర నిష్పత్తిని ఎన్నుకోవాలి
ఈ అతి ఎక్కువ ఋణ సంఖ్య గల దొంతిలో అన్ని ధనేతర సంఖ్యలుగా వున్నాయి
No
ఈ కీలక దొంతిలో ధన సంఖ్యలను
$(X_{Bi} > 0)$ తీసుకొని $\frac{X_{Bi}}{Y_{ir}}(Y_{ir}) > 0,$
$i = 0,1,....m$ నిష్పత్తులను గణన చేయాలి.
Yes
ఇచ్చిన సమస్యకు అపరిబద్ధం గల సమాధానం వస్తుంది

అంటే $\begin{bmatrix} 32110 \\ 21201 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

స్పష్టంగా A మాత్రిక కోటి $P(A)=2$ కాబట్టి $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$లు రెండు A మాత్రిక ఏకఘాత స్వతంత్ర దొంతి సదిశలు. కనుక $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ను A అసాధారణ ఉపమాత్రికగా తీసుకోవచ్చు.

X_4, X_5లు ఆధార చలరాశులవుతాయి. కాబట్టి తొలి ఆధార ఆచరణీయ సాధన

$$X_B = B^{-1} b$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$X_B = \begin{bmatrix} X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ఈ ఆధార చలరాశులకు అనురూప మాత్రిక $Y = B^{-1} A$ నికర విలువను $Z_i - C_i = C_B Y_i - C_i$, $i = 1, 2, \ldots n$ గణన చేయాలి. ఇక్కడ C_B లక్ష్య ప్రమేయంలోని ఆధార చలరాశుల మూల్యాలు ఆధార ఆచరణీయమైన సాధనానికి

$$Z = C_n X_B$$

$$= \sum_{i=4.5} C_{Bi} X_{Bi}$$

$$= 0$$

ఇప్పుడు ఆధారంలో లేని చలరాశుల నికర గణన $Z_i - C_i$, $i = 1, 2, 3$

$$Z_1 - C_1 = C_B Y_1 - C_1$$

$$= [0, 0] \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 = -1$$

$Z_2 - C_2 = C_B Y_2 - C_2$

$$= [0,0]\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} - 1 = -1$$

$Z_3 - C_3 = C_B Y_3 - C_3$

$$= [0,0]\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} - 3 = -3$$

C_B, Y_B, X_B, C_i లను సింప్లెక్స్ పట్టికలో వ్రాయాలి.

తొలి పట్టిక :

		$C =$	1	1	3	0	0	
C_B	Y_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	$\frac{X_{B_1}}{Y_{1_3}} = \frac{3}{1} = 3$
0	Y_4	$X_4 = 3$	3	2	1	1	0	
0	Y_5	$X_5 = 2$	2	1	2	0	1	$\frac{X_{B_2}}{Y_{2_3}} = \frac{2}{2} = 1$
		$Z = 0$	-1	-1	-3	0	0	

$Z_i\ (Z_i - C_i)$ విలువలను గణన చేసి చివర వరుసలో వ్రాయాలి. పై పట్టికలో మూడు $(Z_i - C_i)$లు ఋణ సంఖ్యలు. ఇందులో కనిష్ట విలువ గల $(Z_i - C_i)$ దొంతిని ఎన్నుకోవాలి. ఇక్కడ అది Y_3 దొంతి అవుతుంది కాబట్టి దానిని కీలక దొంతిగా పరిగణించాలి. Y_3 దొంతిలోని అన్ని మూలకాలు ధనాత్మకాలు. కాబట్టి Y_3 సదిశ ఆధారంలోకి Y_B ప్రవేశిస్తుంది. ఆధారం నుంచి వెళ్ళే సదిశను ఎన్నుకోవాలి.

$\frac{X_{Bi}}{Y_{is}}, Y_{is} > 0,\ i = 1, 2$ ల నిష్పత్తులను గణన చేసి కనిష్ట విలువలను కనుక్కోవాలి. అది ఇక్కడ $\frac{2}{2} = 1$ కాబట్టి Y_5 సదిశ ఆధారం నుంచి తొలగిపోతుంది. ఇక్కడ రెండోవరుసను కీలక వరుసగా పరిగణించాలి. కీలక మూలకం 2.

మొదటి పునరుక్తి : Y_B నుంచి Y_5 తొలగిపోయి Y_3 ప్రవేశిస్తుంది. రెండో వరుసను రెండుతో భాగిస్తే కీలక మూలకం యూనిట్‌గా

(1)ను కీలక దొంతిలో మిగతా మూలకాలను శూన్యవిలువలుగా వచ్చేట్లు మాత్రిక వరుస పరిక్రియలను చేసి ఈ క్రింది సింప్లెక్స్ పట్టికలో వ్రాయాలి.

		$C=$	1	1	3	0	0	
C_B	Y_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	
0	Y_4	$X_4=2$	2	3/2	0	1	-1/2	
3	Y_3	$X_3=1$	1	1/2	1	0	1/2	
		$Z=3$	2	1/2	0	0	3/2	Z_i-C_i

ఇప్పుడు మళ్ళీ (Z_i-C_i)లను గణన చేసి పట్టిక చివర వరుసలో వ్రాయాలి. ఈ పట్టికలో అన్ని (Z_i-C_i) విలువలు ఋణేతర సంఖ్యలు కాబట్టి సమస్యకు అభిలషణీయమైన సమాధానం ($X_1=0,\ X_2=0,\ X_3=1$) లక్ష్య ప్రమేయం గరిష్టీకరణ విలువ = 3.

ఉదాహరణ : 2

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0, X_3 \geq 0$$

$$\frac{14}{3}x_1 + \frac{x_2}{3} - 2x_3 \leq 7$$

$$16x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 6x_3 \leq 5$$

$-3x_1 - x_2 - x_3 \leq 0$ అవుతూ

$107x_4 + x_2 + 2x_3$ ని గరిష్టీకరించే సమస్యను సాధించండి.

సాధన : X_4, X_5, X_6 అనే Slack Variables ను ఉపయోగించి పై సమస్యలో ఇచ్చిన అసమీకరణాలను సమీకరణాలుగా కింద చూపిన విధంగా మార్చాలి.

$$\frac{14}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_2 - 2x_3 + x_4 = 7$$

$$16x_1 + \frac{1}{2}x_2 - 6x_3 + x_5 = 5$$

$$-3x_4 - x_2 - x_3 + x_6 = 0$$

ఇప్పుడు లక్ష్య ప్రమేయం $107x_4 + x_2 + 2x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + 0.x_6$ అవుతుంది. ఇక్కడ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$

ఈ సమీకరణాలను $Ax = b$ రూపంలో వ్రాయాలి.

$$\begin{bmatrix} \frac{14}{3} & \frac{1}{3} & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 16 & \frac{1}{2} & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A మాత్రికలో $p(\mathrm{A})\mathrm{H} = 3$ కాబట్టి $(1\ 0\ 0)$ $(0\ 1\ 0)$ $(0\ 0\ 1)$లు A మాత్రిక ఏకఘాత స్వతంత్ర దొంతి సదిశలు. కనుక

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ను A అసాధారణ ఉపమాత్రికగా తీసుకోవచ్చు.

x_4, x_5, x_6లు ఆధార చలరాశులగును. కాబట్టి ఆధార ఆచరణీయ సాధనం.

$$X_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \therefore X_B = \begin{bmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

వీటి అనురూప ఆధార చలరాశులు $y = B^{-1}A$ నికర విలువలు $(Z_i - C_i) = C_B Y_i - C_i \,(i = 1, 2, \ldots n)$ గణన చేయాలి.

తొలి పట్టిక :

		$C =$	107	1	2	0	0	0	X_{Bi} / Y_{i_1}
C_B	Y_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	$7/\frac{14}{3} = 1.5$
0	Y_4	$X_4 = 7$	14/3	1/3	-2	1	0	0	
0	Y_5	$X_5 = 5$	16	1/2	-6	0	1	0	5/16 = 0.31
0	Y_6	$X_6 = 0$	-3	-1	-1	0	0	1	0/3 = 0
		$Z = 0$	-107	-1	-2	0	0	0	

పై పట్టికలో మూడు ($Z_i - C_i$)లు ఋణసంఖ్యలు. ఇందులో కనిష్ఠ విలువ గల ($Z_i - C_i$) దొంతిని ఎన్నుకోవాలి. ఇక్కడ Y_1 దొంతి అవుతుంది. కాబట్టి దీనిని కీలక దొంతిగా పరిగణించాలి. Y_1 దొంతిలో అన్ని మూలకాలు ధనాత్మకాలు కాబట్టి Y_1 సదిశ ఆధారంలో (Y_B) ప్రవేశిస్తుంది. ఆధారం నుంచి వెళ్ళే సదిశను ఎన్నుకోవాలి.

$\left\{\frac{X_{Bi}}{Y_{i1}}, Y_{i1} > 0,\ i = 1, 2, 3\right\}$ ల నిష్పత్తులను గణన చేసి అతి తక్కువ విలువను ఎన్నుకోవాలి. అది ఇక్కడ '0' కాబట్టి Y_6 సదిశ ఆధారం నుంచి తొలగిపోతుంది. ఇక్కడ మూడో వరుసను కీలక వరుసగా పరిగణించాలి. కీలక మూలకం 3.

మొదటి పునరుక్తి : Y_B నుంచి Y_6 తొలగిపోయి Y_1ను ప్రవేశిస్తుంది. మూడో వరుసను 3తో భాగిస్తే కీలక మూలకం యూనిట్ (1)గాను కీలక దొంతిలో మిగతా మూలకాలను శూన్య విలువలుగా వచ్చేటట్లు మాత్రిక వరుస ప్రక్రియలను చేసి ఈ క్రింది సింప్లెక్స్ పట్టికలో వ్రాయాలి.

		$C =$	107	1	2	0	0	0	
C_B	Y_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_1	Y_5	Y_6	
0	Y_4	X_4=7/3	0	17/9	-4/9	1	0	-14/9	
0	Y_5	$X_5 = 5$	0	35/6	-2/3	0	1	-16/3	
107	Y_1	$X_1 = 0$	1	-1/3	-1/3	0	0	1/3	
		$Z = 0$	0	-110/3	-113/3	0	0	107/3	$Z_i - C_i$

ఇప్పుడు ($Z_i - C_i$) విలువలను గణన చేయాలి. పై పట్టికలో రెండు ($Z_i - C_i$)లు ఋణ సంఖ్యలు. ఇందులో కనిష్ఠ విలువ -113/3 గల సదిశ Y_3, Y_3 దొంతిలో అన్ని మూలకాలు ఋణాత్మకాలు కాబట్టి ఇచ్చిన సమస్యకు అపరిబద్ధమైన సమాధానం ఉంది.

ఉదాహరణ : 3

$x_1 \geq 0,\ x_2 \ \geq 0$

$2x_1 + x_2 \leq 50$

$2x_1 + 5x_2 \leq 100$

$2x_1 + 3x_2 \leq 90$

$4x_1 + 10x_2$ ని గరిష్ఠీకరించే సమస్యను సాధించండి.

సాధన : X_3, X_4, X_5 అనే Slack variable ను ఉపయోగించి మూడు నియమాలను కింద చూపించిన విధంగా సమీకరణంగా మార్చాలి.

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 50$$

$$2x_1 + 5x_2 + x_4 = 100$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_5 = 90$$

ఇప్పుడు లక్ష్య ప్రమేయం $4x_1 + 10x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5$

ఇక్కడ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

పై మూడు సమీకరణాలను $Ax = b$ రూపంలో వ్రాయాలి.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 90 \end{bmatrix}$$

స్పష్టముగా A మాత్రిక కోటి $p(\mathrm{A}) = 3$ కాబట్టి $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ లు మూడు A మాత్రిక ఏకఘాత స్వతంత్ర దొంతి సదిశలు కాబట్టి

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ను A అసాధారణ ఉపమాత్రికగా తీసుకోవచ్చు. x_3, x_4, x_5లు ఆధార చలరాశులు అవుతాయి.

కాబట్టి తొలి ఆధార ఆచరణీయ సాధన

$$X_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 90 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 90 \end{bmatrix}$$

$$X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \\ 90 \end{bmatrix}$$

ఈ ఆధార చలరాశులకు అనురూప మాత్రిక $Y = B^{-1}A$ నికర విలువలు $\left(Z_i - C_i\right) = C_B Y_i - C_i ; i = 1, 2, \ldots . n$ గణన చేయాలి. C_B, Y_B, X_B, C_i లను సింప్లెక్స్ పట్టికలో వ్రాయాలి.

తొలిపట్టిక :

			4	10	0	0	0	X_{Bi} / Y_{iz}
C_B	Y_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	
0	Y_3	$X_3 = 50$	2	1	1	0	0	50/1 = 50
0	Y_4	$X_4 = 100$	2	5	0	1	0	100/5 = 20
0	Y_5	$X_5 = 90$	2	3	0	0	1	90/3 = 30
		$Z = 0$	-4	-10	0	0	0	$Z_i - C_i$

Z, $Z_i - C_i$ విలువలను గణన చేసి చివరి వరసలో వ్రాయాలి. పై పట్టికలో రెండు ($Z_i - C_i$) విలువలు ఋణ సంఖ్యలు. ఇందులో కనిష్ఠ విలువలు గల దొంతిని ఎన్నుకోవాలి. ఇక్కడ అది Y దొంతి అవుతుంది. ఈ దొంతిలో అన్ని మూలకాలు ధనాత్మకాలు. కాబట్టి Yసదిశ ఆధారంలోనికి (Y_B) ప్రవేశిస్తుంది. ఆధారము నుంచి వెళ్ళే సదిశను ఎన్నుకోవాలి. $\left\{\frac{X_{Bi}}{Y_{i2}}, Y_{i2} > 0, i = 1, 2, 3\right\}$ ల నిష్పత్తులను గణన చేసి కనిష్ఠ విలువను ఎన్నుకోవాలి. అది ఇక్కడ 20 కాబట్టి, Y_4 సదిశ ఆధారం నుంచి తొలగిపోతుంది. కీలక మూలకం 5.

మొదటి పునరుక్తి : Y_B నుంచి Y_4 తొలగిపోయి Y_2 ప్రవేశిస్తుంది. రెండో వరుసను 5తో భాగించి కీలక మూలకాన్ని యూనిట్ 1 గాను కీలక దొంతిలో మిగతా మూలకాలు శూన్య విలువలుగా వచ్చేటట్లు మాత్రిక వరుస పరిక్రియలను చేసి ఈ క్రింది సింప్లెక్స్ పట్టికలో వ్రాయాలి.

		C = 4		10	0	0	0
C_B	Y_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
0	Y_3	$X_3 = 30$	8/5	0	1	-1/5	0
10	Y_2	$X_2 = 20$	2/5	1	0	1/5	0
0	Y_5	$X_5 = 30$	4/5	0	0	-3/5	1
		200	0	0	0	2	0

మరల $Z_i - C_i$ లను గణన చేసి పై పట్టికలో చివరి వరుసలో వ్రాయాలి. ఈ పట్టికలో అన్ని ($Z_i - C_i$)లు ఋణేతర సంఖ్యలు కాబట్టి సమస్యకు అభిలషణీయమైన సమాధానం $\left(X_1 = 0, X_2 = 20\right)$లక్ష్య ప్రమేయం గరిష్ఠీకరణ విలువ 200.

గమనిక : చివరి పట్టికలో ఆధారం లేని చలరాశి x_1, అనుగుణ నికర విలువ శూన్యము. ఈ నికర విలువ శూన్యమవటం సమస్యకు ప్రత్యామ్నాయ సాధన వుంటుందని సూచిస్తుంది. Y_1 సదిశను ఆధారంలోనికి తొలగించాలి. ఇప్పుడు వచ్చే కొత్త ఆధార ఆచరణీయమైన సాధన కూడా అభిలషణీయమే.

కాబట్టి Y_1 సదిశను ఆధారంలో ప్రవేశింపజేసి Y_3 సదిశను ఆధారం నుంచి తొలగిస్తే వచ్చే క్రొత్త అభిలషణీయ సాధన కింద పట్టికలో చూపించడమైనది.

C_B	Y_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5
4	Y_1	150 / 8	1	0	5/8	-1/8	0
10	Y_2	25 / 2	0	1	-1/4	1/4	0
0	Y_3	15	0	0	-1/2	-1/2	1
		200	0	0	0	2	5

ఈ పట్టిక నుంచి ఆధార ఆచరణీయ సాధన మారినట్లు గమనించవచ్చు. కానీ అభిలషణీయమైన విలువ మారలేదు. కాబట్టి ఇచ్చిన సమస్యకు రెండు ఆధార ఆచరణీయమైన సాధనలు ఉండినట్లయితే మనం అపరిమితమైన, అభిలషణీయమైన సాధనలను గణన చేయవచ్చు. ఆ రెండు ఆధార ఆచరణీయ సాధనల యొక్క ఏ భారిత సగటు అభిలషణీయంగా తయారవుతుంది.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 30 \\ 0 \\ 30 \end{bmatrix} \text{ మరియు } x_2 = \begin{bmatrix} 150/8 \\ 25/8 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix} \text{ లు}$$

రెండు ఆధార ఆచరణీయ సాధనలయితే

$$x^* = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 = \begin{bmatrix} (1-\lambda)\dfrac{150}{8} \\ \dfrac{25}{8} - \dfrac{135}{8}\lambda \\ 30\lambda \\ 0 \\ 15+15\lambda \end{bmatrix}$$

ఇక్కడ $0 \le \lambda \le 1$

ప్రతి $0 \le \lambda \le 1$ కు సాధన x^* ఒకే అభిలషణీయమైన విలువ, 200, ఇస్తుంది.

ఉదాహరణ : 4

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, x_3 \ge 0$

$3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 7$

$-2x_1 + 4x_2 \le 12$

$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10$ అవుతూ

$-x_1 - 3x_2 + 2x_3$ ని కనిష్ఠీకరించే సమస్యను సాధించండి.

సాధన : ఇచ్చిన లక్ష్య ప్రమేయమును గరిష్ట విలువలోనికి మార్చవలెననగా

$$\min(Z) = -\max(-Z)$$

కావున లక్ష్య ప్రమేయం $-x_1 + 3x_2 - 2x_3$ అవుతుంది.

x_4, x_5, x_6 అను Slack variablesను ఉపయోగించి పై సమస్యలో ఇచ్చిన అసమీకరణాలను సమీకరణాలుగా కింద చూపిన విధంగా మార్చాలి.

$3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 7$

$-2x_1 + 4x_2 + x_5 = 12$

$-4x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_6 = 10$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$

ఇప్పుడు లక్ష్య ప్రమేయం $-x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + 0.x_6$ అవుతుంది.

ఈ సమీకరణాలను $Ax = b$ రూపంలో వ్రాయాలి.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix}$$

A మాత్రికలో $p(A)=3$ కాబట్టి

$(1\ 0\ 0)(0\ 1\ 0)(0\ 0\ 1)$ లు A మాత్రిక ఏకఘాత స్వతంత్ర దొంతి సదిశలు. కనుక

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$ ను A అసాధారణ ఉపమాత్రికగా తీసుకోవచ్చు.

x_1, x_5, x_6 లు ఆధార చలరాశులగును.

కాబట్టి ఆధార ఆచరణీయ సాధనం

$$X_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\12\\10\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\12\\10\end{bmatrix}$$

$$\therefore X_B = \begin{bmatrix}x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\12\\10\end{bmatrix}$$

వీటి అనురూప చలరాశులు $Y = B^{-1}A$ నికర విలువలు

$(Z_i - C_i) = C_B Y_i - C_i\,(i=1,2,....n)$ గణన చేయాలి.

తొలి పట్టిక :

		C=	-1	3	-2	0	0	0	X_{Bi}/Y_{i2}
C_B	Y_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	
0	Y_4	$X_4=7$	3	-1	3	1	0	0	-1
0	Y_5	$X_5=12$	-2	4	0	0	1	0	12/4 = 3
0	Y_6	$X_6=10$	-4	3	8	0	0	1	10/3
			1	-3	2	0	0	0	

పై పట్టికలో ఒక $(Z_i - C_i)$ విలువ ఋణసంఖ్య. ఇందులో ఆ దొంతిని ఎన్నుకోవాలి. ఇక్కడ Y_2 దొంతి అవుతుంది. కాబట్టి దీనిని కీలక దొంతిగా పరిగణించాలి. Y_2 దొంతిలో మూలకాలు ధనాత్మకాలు కాబట్టి Y_2 సదిశ ఆధారంలో (Y_B)

ప్రవేశిస్తుంది. ఆధారం నుంచి వెళ్ళే సదిశను ఎన్నుకోవాలి $\left\{ {XB_i}/{Y_{i2}},\ Y_{i2} > 0,\ i = 1, 2, 3 \right\}$ల నిష్పత్తులను గణన చేసి అతి తక్కువ విలువను ఎన్నుకోవాలి. అది ఇక్కడ 3 కాబట్టి Y_5 సదిశ ఆధారం నుంచి తొలగిపోతుంది. ఇక్కడ రెండో వరుసను కీలక వరుసగా పరిగణించాలి. కీలక మూలకం 4.

మొదటి పునరుక్తి : Y_B నుంచి Y_5 తొలగిపోయి Y_2 ప్రవేశిస్తుంది. రెండో వరుసను 4తో భాగిస్తే కీలక మూలకం యూనిట్(1)గాను కీలక దొంతిలో మిగతా మూలకాలను శూన్య విలువలుగా వచ్చేటట్లు మాత్రిక వరుస ప్రక్రియలను చేసి ఈ క్రింది సింప్లెక్స్ పట్టికలో వ్రాయాలి.

రెండవ పట్టిక :

		$C=$	-1	3	-2	0	0	0	$\min X_{Bi} / X_{i1}$
C_B	Y_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	
0	Y_4	10	5/2	0	3	1	1/4	0	10 × 2/5 = 4
3	Y_2	3	-1/2	1	0	0	1/4	0	
0	Y_6	1	-5/2	0	8	0	-3/4	1	
			-1/2	0	2	0	3/4	0	

పై పట్టికలో ఒక $(Z_i - C_i)$ విలువ ఋణసంఖ్య. ఇందులో ఆ దొంతిని ఎన్నుకోవాలి. ఇక్కడ Y_1 దొంతి అవుతుంది. కాబట్టి దీనిని కీలక దొంతిగా పరిగణించాలి. Y_1 దొంతిలో మూలకాలు ధనాత్మకాలు కాబట్టి Y_1 సదిశ ఆధారంలో (Y_B) ప్రవేశిస్తుంది. ఆధారం నుంచి వెళ్ళే సదిశను ఎన్నుకోవాలి $\left\{ {XB_i}/{Y_{i1}},\ Y_{i1} > 0,\ i = 1, 2, 3 \right\}$ల నిష్పత్తులను గణన చేసి అతి తక్కువ విలువను ఎన్నుకోవాలి. అది ఇక్కడ 4 కాబట్టి Y_4 సదిశ ఆధారం నుంచి తొలగిపోతుంది. ఇక్కడ మొదటి వరుసను కీలక వరుసగా పరిగణించాలి. కీలక మూలకం 5/2. Y_B నుంచి Y_4 తొలగిపోయి Y_1 ప్రవేశిస్తుంది. మొదటి వరుసను 5/2తో భాగిస్తే కీలక మూలకం యూనిట్ (1)గాను కీలక దొంతిలో మిగతా మూలకాలను శూన్య విలువలుగా వచ్చేటట్లు మాత్రిక వరుస ప్రక్రియలను చేసి ఈ క్రింది సింప్లెక్స్ పట్టికలో వ్రాయాలి.

మూడవ పట్టిక :

		$C=$	-1	3	-2	0	0	0
C_B	Y_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
-1	Y_1	4	1	0	6/5	2/5	1/10	0
3	Y_2	5	0	1	3/5	1/5	3/10	0
0	Y_6	11	0	0	11	1	-1/2	1
			0	0	13/5	1/5	8/10	0

ఇప్పుడు $(Z_i - C_i)$ విలువలను గణన చేయాలి. పై పట్టికలో రెండు $(Z_i - C_i)$ లు ఋణేతర సంఖ్యలు కాబట్టి సమస్యకు అభిలషణీయమైన సమాధానం $X_1 = 4,\ X_2 = 5,\ X_3 = 11$ లక్ష్య ప్రమేయం యొక్క గరిష్ఠీకరణ విలువ = -11.

ఉదాహరణ : 5

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$-x_1 + x_2 \leq 2$ అవుతూ

$3x_1 + 4x_2$ ని గరిష్ఠీకరించే సమస్యను సాధించండి.

సాధన : x_3, x_4 అను Slack Variablesను ఉపయోగించి పై రెండు నియమాలను సమీకరణాలుగా మార్చవలెను.

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$-x_1 + x_2 + x_4 = 2$$

ఇప్పుడు లక్ష్య ప్రమేయం $3x_1 + 4x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$

ఇక్కడ $x_1,\ x_2, x_3, x_4 \geq 0$

పై రెండు సమీకరణాలను $Ax = b$ రూపంలో వ్రాయగా

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(1 0) (0 1) లు A మాత్రిక ఏకఘాత స్వతంత్ర దొంతి సదిశలు.

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ను A అసాధారణ ఉపమాత్రికలుగా తీసుకోవచ్చు.

x_3, x_4 లు ఆధార చలరాశులగును.

కాబట్టి ఆధార ఆచరణీయ సాధనం.

$$X_B = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

వీటి అనురూప ఆధార చలరాశులు $Y = B^{-1}A$

నికర విలువలు $(Z_i - C_i) = C_B Y_i - C_i (i = 1, 2, ...n)$ గణన చేయాలి.

తొలి పట్టిక :

		$C =$	3	4	0	0	$\min X_{Bi} / Y_{i2}$
C_B	Y_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	
0	Y_3	$X_3 = 1$	1	-1	1	0	-
0	Y_4	$X_4 = 2$	-1	1	0	1	2/1 = 2
		$Z - C_i$	-3	4	0	0	

పై పట్టికలో రెండు $(Z_i - C_i)$లు ఋణసంఖ్యలు. ఇందులో కనిష్ట $(Z_i - C_i)$ విలువ గల దొంతిని ఎన్నుకోవాలి. ఇక్కడ Y_2 దొంతి అవుతుంది. కాబట్టి దీనిని కీలక దొంతిగా పరిగణించాలి. Y_2 దొంతిలో ధనవిలువ వున్నది కావున అది ఆధారంలో ప్రవేశిస్తుంది. ఆధారం నుంచి వెళ్ళే సదిశను ఎన్నుకోవాలి $\left\{ {XB_i}/{Y_{i2}}, Y_{i2} > 0, i = 1, 2 \right\}$ల నిష్పత్తులు గణన చేసి అతి తక్కువ విలువను ఎన్నుకోవాలి. అది ఇక్కడ Y_4 సదిశ కావున Y_4 ఆధారం నుంచి తొలగిపోతుంది. ఇక్కడ రెండో వరుసను కీలక వరుసగా పరిగణించాలి. కీలక మూలకం 1.

మొదటి పునరుక్తి : Y_B నుంచి Y_4 తొలగిపోయి Y_2 ప్రవేశిస్తుంది. రెండో వరుసలో మిగిలిన మూలకాలను శూన్య విలువలుగా వచ్చేటట్లు మాత్రిక వరుస ప్రక్రియలను చేసి ఈ క్రింది సింప్లెక్స్ పట్టికలో వ్రాయాలి.

		$C =$	3	4	0	0	$\min X_{Bi} / X_{i1}$
C_B	Y_B	X_B	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	
0	Y_3	3	0	0	1	1	
4	Y_2	2	-1	1	0	1	
			-7	0	0	4	

ఇప్పుడు $(Z_i - C_i)$ విలువలను గణన చేయాలి. పై పట్టికలో ఒక ఋణసంఖ్య, అదే కనిష్ట విలువ మరియు Y_1 దొంతిలోని విలువలు ఋణసంఖ్య మరియు సున్న కావున ఇచ్చిన సమస్యకు అపరిబద్ధమైన సమాధానం ఉంది.

18.6 అభ్యాసాలు :

ఎ. ఈ క్రింది వానికి సంక్షిప్తంగా జవాబులు రాయండి.

1. సింప్లెక్స్ పద్ధతి ఆవశ్యతలను గూర్చి రాయండి.
2. సింప్లెక్స్ పద్ధతిలో చక్రీయత గూర్చి రాయండి.
3. సింప్లెక్స్ పట్టిక సాంకేతికాలను గూర్చి రాయండి.
4. కీలక దొంతి గూర్చి రాయండి.
5. అపరిబద్ధమైన సమాధానం అంటే ఏమిటి ?
6. అభిలషణీయ ఆధార ఆచరణీయ సాధన అంటే ఏమిటి ?
7. లక్ష్య ప్రమేయం గూర్చి రాయండి.

బి. ఈ క్రింది వాటికి విపులంగా జవాబులు వ్రాయండి.

1. సింప్లెక్స్ పద్ధతి గూర్చి వివరంగా వ్రాయండి.
2. సింప్లెక్స్ అల్గారిథమ్‌ను వివరింపుము.
3. సింప్లెక్స్ పద్ధతి ధర్మాలను విపులీకరించండి.
4. సింప్లెక్స్ పద్ధతి యొక్క ఫ్లో ఛార్ట్‌ను గీయండి.
5. సమస్యకు రెండు ఆధార ఆచరణీయమైన సాధనాలు ఉండినట్లయితే అపరిమితమైన అభిలషణీయమైన సాధనాలు చేయవచ్చునని ఉదాహరణ పూర్వకంగా ఋజువు చేయండి.
6. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,\ 3x_1+5x_2 \leq 15,\ 5x_1+2x_2 \leq 10$ అవుతూ $5x_1+3x_2$ ని గరిష్ఠీకరించే సమస్యను సాధించండి.
7. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,\ 4x_1+5x_2+3x_2 \leq 15, 10x_1+7x_2+x_3 \leq 12$ అవుతూ $x_1+x_2+x_3$ ని గరిష్ఠీకరించే సమస్యను సాధించండి.
8. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0,\ 3x_1+4x_2+x_3 \leq 25,\ x_1+3x_2+3x_3 \leq 50$ అవుతూ $8x_1+19x_2+7x_3$ ని గరిష్ఠీకరించే సమస్యను సాధించండి.
9. $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1+x_2 \leq 2,\ 5x_1+2x_2 \leq 10, 3x_1+8x_2 \leq 12$ అవుతూ $5x_1+3x_2$ ని గరిష్ఠీకరించే సమస్యను సాధించండి.

రచయిత

డా॥ కె. చందన్